Conjuntos Numéricos

"El nacimiento de las matemáticas se debe a un intento por solucionar todo tipo de problemas con los que las antiguas civilizaciones se encontraban.
Puede decirse que los números surgieron hacia el año 3.000 a.C. mediante la abstracción de los objetos que se contaban.
Ya en el 1.650 a.C. existe un importante tratado en el que se hace todo tipo de afirmaciones y deducciones matemáticas: se trata del papiro del Rhind o de Ahmes, que pasa por ser la mayor fuente de conocimiento de la matemática egipcia.
Otras civilizaciones, como la babilónica y la mesopotámica, tenían ya avanzados conocimientos en esta misma época de la historia. Por ejemplo, los números naturales y las fracciones positivas eran conocidos ya por los antiguos babilonios hacia el 2.000 a.C." [1]

Situación 1

Jorge colecciona monedas. Una parte de su colección son monedas nacionales y el resto extranjeras. A su vez, entre sus monedas algunas son antiguas mientras que el resto son contemporáneas. De su colección sabemos que:

- *en total tiene 143 monedas.*
- *68 son nacionales.*
- *72 son antiguas.*
- *dentro del grupo de monedas extranjeras tiene el doble de monedas contemporáneas que antiguas.*

¿Cuántas monedas nacionales antiguas posee?

Extraído de "Resolviendo Problemas de Matemáticas" de Juan Ignacio Fuxman Bass.

El conjunto de los números naturales está formado por aquellos números que utilizamos para contar. Se los designa con la letra N y se representan: N = {1, 2, 3, 4, 5, …}

Este conjunto numérico tiene infinitos elementos, si bien tiene un primer elemento, que es el 1, no tiene último elemento ya que es suficiente con sumar 1 a un número para obtener otro mayor. Así, podemos afirmar también que es un conjunto ordenado; por lo que podemos representarlos sobre una recta de la siguiente manera:

[1] Flores Gil, Francisco Luis. "Matemáticas en la antigüedad". Ittakus. España. 2008.

Propiedades de los números naturales:

- Todos los números naturales **n**, tienen un sucesor o siguiente denominado **n + 1** y excepto el 1, todos tienen un antecesor denominado **n - 1**.
- Siempre que se suman dos números naturales se obtendrá otro número natural mientras que no siempre sucede lo mismo cuando se restan dos números naturales.

Actividad

1-. Colocar paréntesis donde corresponda para que el resultado sea verdadero:

a) $15 - 3 - 1 = 13$ b) $18 + 3 - 15 + 2 = 4$

c) $28 - 13 - 3 + 8 = 10$ d) $4 + 2 . 3 = 18$

2-. Calcular:

a) $30 + 12 + 70 + 50 + 0 + 50 + 4$ b) $10 - 2 + 6 - 1 + 4 - 5 + 2$

c) $34 - 3 + 25 - 12 + 3$ d) $(2.3 - 5). (2 + 3)$

Para profundizar, recomendamos ver:

- Marina, E. Andrés … [et.al] " MATEMÁTICA I ". Edit. Santillana. S. A. Buenos Aires. 2011. Página 7 a 39

-Kurzrok, Liliana E. y Comparatore, Claudia R. "Serie Temática-MATEMÄTICA| Números y Operaciones I - Secuencias de actividades". Tinta Fresca Ediciones S. A. Buenos Aires. 2013. Página 5 a 32.

Si quisiéramos restar 15 - 18, no lo podríamos hacer con el conjunto de los números naturales. No tendría solución en este conjunto. Para darle solución a este tipo de situaciones, donde el minuendo es menor que el sustraendo, surge un conjunto numérico denominado números negativos.

Los números negativos son los números opuestos a los números naturales. Ahora, con los números naturales, el cero y los números negativos se formó el conjunto de los números enteros. Se los simboliza con Z.

$$Z=\{\ldots -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\}$$

Propiedades:

- El conjunto de los números enteros tiene infinitos elementos, no tienen ni primero ni último elemento, y siempre después de un elemento **n** se puede encontrar otro elemento llamado siguiente de la forma **n+1** y un elemento anterior de la forma **n-1**.
- Entre dos números enteros **a** y **b** hay siempre una cantidad finita de números enteros. Esta propiedad se conoce con el nombre de ***discretitud***.

En la recta numérica se representa gráficamente al cero, a la izquierda del uno y a la izquierda del cero todos los números negativos.

Podemos interpretar geométricamente el Valor Absoluto de un número entero a la distancia a la que se encuentra del cero y se simboliza: |x|

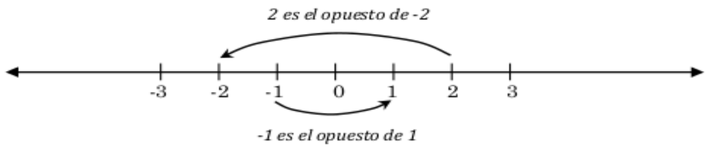
Por ejemplo

|4| = 4, se lee *"el valor absoluto de cuatro es cuatro", porque este número se encuentra a cuatro unidades del cero.*

|-7| = 7 ,*"el valor absoluto de menos siete es siete", porque se encuentra a siete unidades del cero.*

Los números que tienen el mismo valor absoluto, se encuentran a la misma distancia del cero. A estos números se los denomina Opuestos.

Por ejemplo, el 12 y el -12 son números opuestos, porque ambos se encuentran a la misma distancia del cero.



Resuelve:

En la siguiente recta numérica están ubicados 0, 1 y a .

¿Dónde ubicarías los números a + 1, −a y −a + 1?

Situación 2

La temperatura más alta registrada en el mundo fue de 58°C en Azizia, en África, el 13 de septiembre de 1922. La más baja fue de -88°C en la Antártida, el 15 de junio de 1958. ¿Cuántos grados tendría que subir el termómetro para pasar de la menor temperatura registrada en nuestro planeta a la mayor?

Extraído de "Matemática 1|2" de Chorny, Fernando y otros.

Cuando sumamos dos números enteros obtenemos por resultado otro número entero.

La suma de dos números enteros de igual signo es otro entero del mismo signo cuyo valor absoluto es la suma de los valores absolutos de los sumandos.

(+3)+(+6)=+9

(-4) + (-9)= -13

La suma de dos números enteros de distinto signo es otro entero cuyo valor absoluto es la resta de los valores absolutos y cuyo signo es el del sumando de mayor valor absoluto.

$$(-5)+(+3)=-2$$
$$(+12)+(-7)=+5$$
$$(+4)+(-8)=-4$$

Restar a un número entero otro entero, es equivalente de sumarla al primero el opuesto del segundo entero.

$$(-51)-(+12)=(-51)+(-12)=-63$$
$$(+84)-(-6)=(+84)+(+6)=+90$$

Cuando multiplicar dos números enteros obtenemos siempre otro número entero.
Al multiplicar o al dividir dos números enteros pueden presentarse dos situaciones:

- Que los factores tengan igual signo, el resultado es positivo.

$$(-12):(-3)=+4$$
$$(+2).(+3)=+6$$

- Que los factores tengan diferentes signos, el resultado es negativo.

$$(+15):(-5)=-3$$
$$(-8).(+2)=-4$$

Actividad

3-. Calcular

a) $3 \cdot 15 + (-4).2$

b) $(-20) \cdot (-5) - \frac{(-8)}{(-4)}$

c) $\frac{2.(-6)}{3} + \frac{(4+6)}{5} - (-8)$

d) $\frac{2+5+3}{2+3} - \frac{-12}{4} + \frac{8}{3+1}$

4-. Calcular aplicando propiedades

a) $5|4-7|$

b) $|10.(-2)|$

c) $|9-5|-|-6|$

d) $\left|\frac{6}{-3}\right| + |2|$

e) $|2-8|+|-5|-|-2|$

f) $|(-3).(-2)| - \left|\frac{12}{4}\right|$

Para profundizar, recomendamos ver:

-Berman, Andrea, … [et.al] "MATEMÁTICA II ". Edit. Santillana S. A. 2011. Buenos Aires. Página 7 a 21.

-Díaz, Adriana L.; Crippa, Ana L.; Agrasar, Mónica. "Matemática 8: anexo teórico+trabajos prácticos". Edit. Longseller S. A. 2011. Buenos Aires. Trabajo Práctico 1. Página 3 a 18.

-Kurzrok, Liliana E. y Comparatore, Claudia R. "Serie Temática-MATEMÄTICA| Números y Operaciones 2 - Secuencias de actividades". Tinta Fresca Ediciones S. A. Buenos Aires. 2013. Página 25 a 46.

Los números enteros son abstracciones del proceso de contar colecciones finitas de objetos. Pero en la vida no es suficiente poder contar objetos individuales, también es necesario poder medir cantidades como longitudes, áreas, volumen, el peso, el tiempo, etc. Estas magnitudes son susceptibles de ser subdivididas en partes iguales, es por ello que es necesario extender el conjunto numérico más allá de lo números enteros. Iniciaremos eligiendo una unidad de medida, por ejemplo, el metro, pie, gramo, libra, segundo, etc. a la que asignamos como 1. Luego contaremos el número de esas unidades contenidas en la cantidad que deseamos medir. Si es una cantidad exacta de veces no habría dificultad, pero no siempre sucede esto, en ocasiones se encuentra entre dos múltiplos consecutivos de la unidad. Cuando esto ocurre, debemos dividir la unidad de medida en un cierto número de partes iguales, obteniendo nuevas subunidades con nombre propio; por ejemplo, el metro se divide en 100 centímetros, el pie en 12 pulgadas, la libra en 16 onzas, la hora en 60 minutos, el minuto en 60 segundos, etc.
Matemáticamente, una subunidad obtenida dividiendo la unidad inicial en **n** partes iguales se la puede escribir con el símbolo **1/n**; y si una cantidad contiene exactamente **m** de estas subunidades, se puede escribir como **m/n**. A esta expresión se la llama ***fracción*** o ***razón***.

Estos números pertenecen a un conjunto numérico nuevo denominado ***Números Racionales***, los que se simbolizan con **Q**.
Un número racional es el cociente (división) de dos números enteros **m** y **n**, siendo n ≠ 0.
Por lo tanto: $Q=\left\{ \frac{m}{n},\ con\ m\ y\ n\ \varepsilon\ Z\ y\ n \neq 0 \right\}$

donde **m** es el numerador y **n** el denominador. Notemos que $Z \subset Q$

De este modo, podemos decir que los números enteros pertenecen a los números racionales y que el valor del denominador es uno.

Por ejemplo; -5 = $\frac{-5}{1}$ donde -5 y 1 pertenecen a Z y además 1 es distinto de cero

Las fracciones que representan el mismo número se denominan fracciones equivalentes.
Para obtener fracciones equivalentes a una fracción conocida, debemos multiplicar o dividir el numerador y el denominador por un mismo número.
A este proceso lo podemos repetir indefinidamente.

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{7}{14}$$

$$\frac{24}{120}=\frac{6}{30}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5} \quad \vdash\!> \ \textit{fracción irreducible}$$

A este último procedimiento se lo llama ***simplificación*** y podemos repetirlo hasta llegar a la ***fracción irreducible***.

Situación 3

Cuando se hizo la elección del delegado del curso, los chicos pudieron elegir entre dos candidatos: Florencia y Gonzalo.

Todos votaron a uno de los dos candidatos. Florencia obtuvo $\frac{2}{3}$ *del total de votos y Gonzalo obtuvo 14 votos. ¿Cuantos chicos votaron?*

Extraído de "Matemática 1|2" de Chorny, Fernando y otros.

Con los números racionales podemos realizar las mismas operaciones que con los conjuntos numéricos antes mencionados.

Para sumar o restar dos o más fracciones, nos podemos encontrar con dos situaciones, cuando los denominadores son iguales y cuando son diferentes.

Si las fracciones tienen igual denominador, lo único que tenemos que realizar es sumar o restar los numeradores.

$$\frac{4}{9}-\frac{7}{9}+\frac{11}{9}=\frac{4-7+11}{9}=\frac{8}{9}$$

Si las fracciones tienen diferentes denominadores, tenemos que buscar fracciones equivalentes con igual denominador para luego realizar el procedimiento anterior.

$$-\frac{7}{6}+\frac{3}{8}=-\frac{28}{24}+\frac{9}{24}=\frac{-28+9}{24}=-\frac{19}{24}$$

$$4+\frac{3}{8}-\frac{1}{6}=\frac{96}{24}+\frac{9}{24}-\frac{4}{24}=\frac{101}{24}$$

https://www.youtube.com/watch?v=WuBv2oqK8s0
https://www.youtube.com/watch?v=9sffCiy_glE
https://www.youtube.com/watch?v=7f9bDwzMFgQ
https://www.youtube.com/watch?v=liF9LsL2mBY

Situación 4

Sofía tiene cinco botellas. Una llena de jugo, una está llena hasta la mitad, otra tiene jugo hasta $\frac{1}{6}$ de su contenido y las dos restantes están vacías. Sofía quiere pasar el líquido de una botella a la otra hasta que las cinco botellas tengan la misma cantidad de jugo. Sofía no tiene ningún medidor de volumen y solamente puede comparar las alturas de líquido entre dos botellas para determinar si tienen distinta cantidad o la misma. ¿Qué fracción de cada botella estará llena si logra que las cinco tengan la misma cantidad de jugo?

Extraído de "Resolviendo Problemas de Matemáticas" de Juan Ignacio Fuxman Bass.

El producto de dos fracciones es otra fracción cuyo numerador se obtiene del producto de los numeradores y el denominador igual al producto de los denominadores. En la multiplicación de fracciones es necesario tener presente la regla de los signos.

$$\frac{5}{2}.\left(-\frac{8}{7}\right)=\frac{5.(-8)}{2.7}=-\frac{40}{14}=-\frac{20}{7}$$

$$-\frac{2}{9}.(-13)=\frac{-2.(-13)}{9}=\frac{26}{9}$$

Para dividir, es conveniente invertir el divisor y transformar la división en una multiplicación.

$$\frac{2}{7}:\frac{3}{5}=\frac{2}{7}.\frac{5}{3}=\frac{2.5}{7.3}=\frac{10}{21}$$

$$-\frac{3}{4}:\frac{81}{16}=-\frac{3}{4}.\frac{16}{81}=-\frac{3.16}{4.81}=-\frac{1.4}{1.27}=-\frac{4}{27}$$

Situación 5

Facundo dividió su campo en 3 partes iguales. Una parte la destinó para sembrar soja y el resto para ganado. De la parte correspondiente al ganado destinó $\frac{3}{5}$ para criar vacas y el resto para ovejas. ¿Qué fracción del campo destino a cría de ovejas? Facundo destinó del total de 26 has para cría de ovejas, ¿cuánto destinó para la siembra de soja?

Extraído de "Resolviendo Problemas de Matemáticas" de Juan Ignacio Fuxman Bass.

Actividad

5-. Completa con la fracción correspondiente.

$\frac{3}{4} - \text{—} = \frac{3}{8}$

$\frac{7}{8} - \text{—} = \frac{1}{4}$

$\text{—} - \frac{3}{5} = -\frac{1}{10}$

$\frac{2}{5} \cdot \text{—} = \frac{3}{5}$

$\frac{1}{3} : \text{—} = \frac{2}{5}$

$\frac{5}{6} : \text{—} = \frac{4}{15}$

Analicemos las siguientes expresiones decimales:

- *1,2* es la expresión decimal de un número racional, porque

$$1{,}2 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

- *0,333333…* es la expresión decimal de un número racional, porque

$$0{,}33333\ldots = 0{,}\hat{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

- 0,83333… es la expresión decimal de un número racional, porque

$$0{,}83333\ldots = 0{,}8\hat{3} = \frac{75}{90} = \frac{5}{6}$$

Estos ejemplos muestran tres tipos diferentes de expresión decimales de números racionales

- Expresión decimal exacto: *0,5; -2,43; 3,09*
- Expresión decimal periódica $0{,}\widehat{23} = 0{,}232323\ldots;\ 5{,}\widehat{123} = 5{,}123123123\ldots$ pura:
- Expresión decimal periódica mixta: $0{,}4\hat{5} = 0{,}455555\ldots;\ 0{,}73\widehat{51} = 0{,}73515151\ldots$

Todos los números racionales pueden escribirse como una expresión decimal con una cierta cantidad de números decimales o con infinitas cifras decimales periódicas, los que llamamos decimales exactos, decimales periódicos puros o periódicos mixtos respectivamente.
Estos números se pueden obtener de una forma muy simple, dividiendo el numerador con el denominador.

Los decimales exactos y periódicos podemos expresarlos en forma de fracción:

$0,35 = \frac{35}{10^2} = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$ En el numerador colocamos todas las cifras del número, sin la coma; y en el denominador, colocamos una potencia de base 10 y exponente igual a la cantidad de cifras decimales del número (en nuestro caso dos). Por último, simplificamos la expresión si es posible.

$4,\widehat{76} = \frac{476-4}{99} = \frac{472}{99}$ Colocamos en el numerador, la diferencia entre el número formado por todas las cifras del número, sin la coma y su parte entera. Y en el denominador, tantos nueves como cifras periódicas tenga el periodo. Restamos y si es posible simplificamos.

$2,04\widehat{78} = \frac{20478-204}{9900} = \frac{20274}{9900} = \frac{3379}{1650}$ Colocamos en el numerador, la diferencia entre el número formado por todas las cifras del número, sin la coma y la parte entera seguida de la parte decimal no periódica; y en el denominador, tantos nueves como cifras periódicas tenga y tantos ceros como cifras decimales no periódicas tenga el número.

Siempre podemos verificar si la fracción que obtuvimos es correcta realizando la división y verificando que el resultado coincide con la expresión decimal que teníamos.

Actividad

6-. Resuelve los siguientes cálculos.

$\left(\frac{5}{3} - 0,1\hat{6}\right).0,\hat{4} + \frac{3}{4} =$

$1,\hat{8} + \frac{25}{6} : 0,\hat{5} - 8,\hat{8} =$

$\frac{5}{8} : \left(0,1\hat{2} + \frac{17}{45}\right) - 0,2 =$

$\left(0,\widehat{36}\ .\ 4,4 - \frac{17}{10}\right).\frac{125}{3} =$

$-4.\frac{1}{5} + \frac{1}{4} : \frac{7}{4} - 0,2 =$

$0,\widehat{45} - \frac{7}{11}.\left(-\frac{1}{3}\right) + 3.\left[0,\hat{3} - \left(1 + \frac{7}{11}\right)\right] =$

$4 : \left(\frac{1}{3} + 2,5\right) - \frac{6}{5}.\left(3 - \frac{4}{3}\right) =$

$\frac{8}{21} + \left(-0,\hat{5} - \frac{5}{3} : \frac{3}{2}\right) - \frac{2}{7} =$

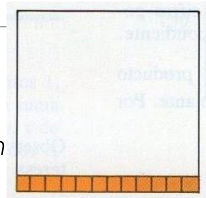
Para profundizar, recomendamos ver:

-Berman, Andrea, … [et.al] "MATEMÁTICA II - Nuevamente". Edit. Santillana S. A. 2011. Buenos Aires. Página 23 a 39.

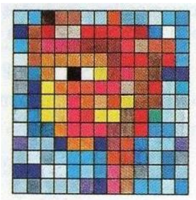
-Piñeiro, Gustavo, … [et.al] "MATEMÁTICA III - Nuevamente". Edit. Santillana S. A. 2011. Buenos Aires. Página 7 a 25.

-Díaz, Adriana L.; Crippa, Ana L.; Agrasar, Mónica. "Matemática 8: anexo teórico+trabajos prácticos". Edit. Longseller S. A. 2011. Buenos Aires. Trabajo Práctico 2. Página 19 a 32.

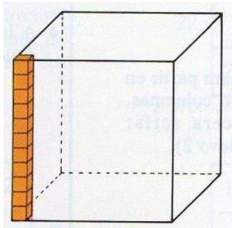
Situación 6



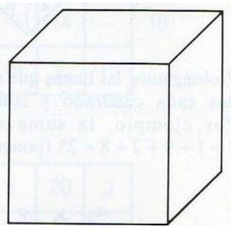
La planta de esta habitación cuadrada está enlosada con baldosas, también cuadradas, de las cuales se ve una hilera. ¿cuántas hay en total?



En esta otra habitación cuadrada hay un total de 169 cerámicos de 20cm x 20cm. ¿Cuánto mide el lado de la habitación?



Este depósito cúbico está lleno de cubitos de los cuales se ve una hilera. ¿Cuántos hay en total?



En este otro depósito cúbico caben exactamente 1000 cubos de 1dm^3. ¿Cuántos encajan en cada arista? ¿Y en cada cara? Responde a las mismas preguntas si en el depósito contuviese 2197 cubos de 1dm^3.

Extraído de "Matemática 1 Bachillerato" de .Guzman, M., Colera, J y Salvador, A.

La potencia es una forma abreviada de escribir un producto de factores iguales.

$a^m = \underbrace{a.\ a.\ \dots\ .a}_{m\ veces}$, donde a^m se lee " **a** *elevado a* **m**"; donde **m** es un número natural que se llama **exponente**; **a** es un número cualquiera que se llama **base**.

Ejemplos:

$$(-5)^3=(-5).(-5).(-5)=-125$$
$$(7)^2=7.\ 7=49$$
$$(-2)^5=(-2).(-2).(-2).(-2).(-2)=-32$$
$$\left(-\frac{2}{3}\right)^4=\left(-\frac{2}{3}\right).\left(-\frac{2}{3}\right).\left(-\frac{2}{3}\right).\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{16}{81}$$

Por convenio, sabemos que: $a^0=1$ $\qquad a^1=a$ $\qquad a^{-m}=\dfrac{1}{a^m}$

Ejemplos:

$$(-5)^{-3}=\frac{1}{(-5)^3}=\frac{1}{-125}=-\frac{1}{125} \qquad \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{1}{\frac{4}{25}}=\frac{25}{4}$$

Propiedades

$(a.b)^n=a^n.\ b^n$	$(4.5)^3=4^3.5^3=64.\ 125=8000$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^5=\frac{3^5}{2^5}=\frac{243}{32}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\frac{b^n}{a^n}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-5}=\frac{2^5}{3^5}=\frac{32}{243}$
$a^m.\ a^n=a^{m+n}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^3.\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^5\ \frac{3^5}{2^5}=\frac{243}{32}$
$(a^m)^n=a^{m.n}$	$[(-5)^2]^4=(-5)^8=390625$
$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$	$\frac{6^8}{6^5}=6^{8-5}=6^3=216$

Actividad

7-. Escriban cada una de las siguientes expresiones como una única potencia de 3.

$$\frac{3^{12}.3^3.3^8}{3^2.3.3^3}= \qquad \frac{(3^3.3^{-5})^{-2}}{(3.3^{-3})^3}= \qquad \left[\frac{3^3:3^{-3}.3^5}{(3^2)^3:(3^2.3^3)}\right]^{-2}=$$

8-. Simplifiquen aplicando las propiedades de la potenciación (p≠0 y q≠0)

$$\frac{p^3.p^4.(p^4)^2:(p^2)^5}{(p^3.p:p^5):p^9}= \qquad \frac{p^3.q^5:(p.q)^3}{p^7.q^4}= \qquad \frac{(p^7.q^5)^2:p^4.q^{-2}}{p^{10}.q^8}=$$

Situación 7

Queremos colocar un cable desde el extremo de un poste de 5m de alto hasta un punto del suelo cuya distancia a la base del poste sea 12 m.

Extraido de "Matemática 1 Bachillerato" de Guzman, M; Colera, J; Salvador, A.

Por el teorema de Pitágoras, la longitud *l* del cable cumple la siguiente relación:

$l^2 = 5^2+12^2$
$l^2 = 25 + 144$
$l^2 = 169$

Si $l^2 = 169$, entonces $l = \sqrt{169} = 13$

La operación inversa de elevar al cuadrado es extraer la raíz cuadrada:

$\sqrt{169} = 13$ porque $13^2 = 169$

El cable que queremos colocar medirá 13 m.

Si $b^2 = a$, entonces **b** es una ***raíz cuadrada*** de ***a***. Por ejemplo, 2 y -2 son raíces cuadradas de 4, ya que $2^2 = (-2)^2 = 4$. En forma análoga, **b** es una ***raíz cúbica*** de ***a*** si $b^3 = a$. Por ejemplo, 5 es una raíz cúbica de 125 ya que $5^3 = 125$.

Sean **n** un entero mayor que 1; **a** y **b** números reales.

- Si $b^n = a$, entonces **b** es una ***raíz n-ésima*** de ***a***.
- Si **a** tiene una ***raíz n-ésima***, la *raíz n-ésima* principal de **a** es la *raíz n-ésima* que tiene el mismo signo que **a**.

La raíz n-ésima principal de **a** se puede expresar mediante la ***expresión radical*** $\sqrt[n]{a}$. El entero positivo **n** es el *índice* del radical y **a** es el *radicando*.

Todos los números tienen exactamente una *raíz n-ésima* siempre que ***n*** sea impar. Por ejemplo, 5 es la única raíz cúbica real de 125, porque 5^3 es 125. Cuando ***n*** es par, los números positivos tienen dos *raíces n-ésimas*; los números negativos no tienen *raíces n-ésimas*. Por ejemplo, las raíces cuartas de 81 son ±3 y -81 no tiene raíces cuartas. La raíz cuarta principal de 81 es 3.

Propiedades

$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a} \, . \sqrt[n]{b}$	$\sqrt{4.25} = \sqrt{4} \; \sqrt{25}$
$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[4]{\dfrac{81}{16}} = \dfrac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}}$
$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$	$(\sqrt[3]{8})^4 = \sqrt[3]{8^4}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$	$\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64}$
$\sqrt[n]{a^r} = \sqrt[n.m]{a^{r.m}}$	$\sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3.2]{5^{3.2}} = \sqrt[6]{5^6}$
$\sqrt[n]{a^r} = \sqrt[n:m]{a^{r:m}}$	$\sqrt[10]{7^{15}} = \sqrt[10:5]{7^{15:5}} = \sqrt{7^3}$

Eliminación de factores de los radicandos

Teniendo en cuenta las propiedades de la radicación, extraeremos factores fuera del radical, cuando estos figuren en el radicando como potencias de exponentes mayor o igual que el índice de la raíz.

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{x^6y^4} = \sqrt[3]{(x^2)^3y^3y} = \sqrt[3]{(x^2)^3}.\sqrt[3]{y^3}\sqrt[3]{y} = x^2y\sqrt[3]{y}$$

$$\sqrt[4]{80} = \sqrt[4]{16.5} = \sqrt[4]{2^4.5} = \sqrt[4]{2^4}.\sqrt[4]{5} = 2.\sqrt[4]{5}$$

Se factorizan los números compuesto, aplicamos propiedad distributiva de la raíz respecto a la multiplicación, simplificamos el índice de la raíz con el exponente del

En general para poder extraer factores fuera del símbolo radical debemos factorizar todos los números compuestos en factores primos, luego agrupar los factores cuyo exponente sea múltiplo del índice, aplicar propiedad distributiva de la raíz respecto a la multiplicación. Por último, simplificar los exponentes de los factores del radicando con el índice de la raíz.

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{128.x^6.y^5.z} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2^7.(x^2)^3.y^3.y^2.z} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2^6.2.(x^2)^3.y^3.y^2.z} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt[3]{(2^2)^3.2.(x^2)^3.y^3.y^2.z} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{(2^2)^3.(x^2)^3.y^3}\,.\sqrt[3]{2.y^2.z} =$$

$$= \frac{1}{2}.2^2.x^2.y.\sqrt[3]{2.y^2.z} = 2.x^2.y.\sqrt[3]{2.y^2.z}$$

$$\sqrt{3.a^2.b^3}\ .\sqrt{6.a^5.b} = \sqrt{3.a^2.b^3.2.3.a^5.b} = \sqrt{2.3^2.a^6.a.b^4} =$$
$$= \sqrt{3^2.(a^3)^2.(b^2)^2}\ .\sqrt{2.a} = 3.a^3.b^2.\sqrt{2.a}$$

Reducción de radicales

$$\sqrt{8} - \sqrt{2} + \sqrt{72} = \sqrt{2^3} - \sqrt{2} + \sqrt{2^3.3^2} = \sqrt{2^2.2} - \sqrt{2} + \sqrt{2^2.3^2}\ .\sqrt{2} =$$
$$= 2.\sqrt{2} - \sqrt{2} + 6.\sqrt{2} = 7.\sqrt{2}$$

En esta expresión, en primer lugar, se factorizan todos los números compuestos a potencias de factores primos, se extraen fuera del radical todos los factores posibles en cada término y luego se suman o restan los términos semejantes.

$$\sqrt{250} - \sqrt{50} + 15.\sqrt{2} = \sqrt{5^3.2} - \sqrt{5^2.2} + 15.\sqrt{2} = \sqrt{5^2.5.2} - \sqrt{5^2.2} + 15.\sqrt{2} =$$
$$= \sqrt{5^2}\ .\sqrt{5.2} - \sqrt{5^2}\ .\sqrt{2} + 15.\sqrt{2} = 5.\sqrt{10} - 5.\sqrt{2} + 15.\sqrt{2} =$$
$$= 5.\sqrt{10} + 10.\sqrt{5}$$

Actividad

9-. Resuelve las siguientes operaciones

$$\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{27} - \sqrt{48} =$$
$$\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + \sqrt{8} - 3\sqrt{8} =$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{12} - \frac{1}{3}\sqrt{18} + \sqrt{2} + \sqrt{27} + 5\sqrt{0{,}02} =$$
$$2\sqrt{24} + \sqrt{54} + 2\sqrt{18} - 5\sqrt{6} =$$

$$\sqrt[5]{x^2.y}.\sqrt[5]{x^4.y^4} =$$
$$\sqrt[3]{9}.\sqrt[3]{24} =$$
$$\sqrt[4]{3x^2}.\sqrt[4]{x^3y}.\sqrt[4]{27x^3y^2} =$$
$$\sqrt[6]{x^2y}.\sqrt[6]{3xz}.\sqrt[6]{12xyz} =$$

Racionalización de denominadores

Cuando una expresión fraccionaria tiene en el denominador un radical, resulta conveniente buscar la forma de modificar tal expresión- sin cambiar su significado-por otra en cuyo denominador sea racional. Este proceso recibe el nombre de racionalización del denominador.

Trabajaremos en dos casos diferentes:

- *Cuando el denominador es único*

Si el denominador de un cociente contiene un factor de la forma $\sqrt[n]{a^k}$, con el valor del exponente (k) menor que el índice (n), y **a** mayor que cero, entonces multiplicar el numerador y denominador por $\sqrt[n]{a^{(n-k)}}$, lo que producirá la eliminación del radical del denominador, porque $\sqrt[n]{a^k}\ .\sqrt[n]{a^{(n-k)}} = \sqrt[n]{a^k.a^{(n-k)}} = \sqrt[n]{a^{k+(n-k)}} = \sqrt[n]{a^n} = a$

Ejemplos.

$$\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{2.\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}}=\frac{2.\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{5^2}}=\frac{1}{\sqrt[5]{5^2}}.\frac{\sqrt[5]{5^3}}{\sqrt[5]{5^3}}=\frac{\sqrt[5]{5^3}}{\sqrt[5]{5^2.5^3}}=\frac{\sqrt[5]{5^3}}{\sqrt[5]{5^5}}=\frac{\sqrt[5]{125}}{5}$$

- *Cuando el denominador tiene dos términos en el cual contiene al menos una raíz cuadrada:*

Si el denominador tiene dos términos en el cual hay al menos una raíz cuadrada, debemos multiplicar numerador y denominador por el denominador de la expresión original, cambiando la operación que separa en términos por la operación opuesta a ésta.
Es decir, si los términos aparecían unidos por la operación de la suma, el que utilizaremos para multiplicar debe tener una resta y viceversa.
Aplicamos la propiedad denominada "*producto de binomios conjugados*" :

$$(a+b).(a-b)=a^2-b^2$$

Ejemplos:

$$\frac{14}{3-\sqrt{2}}=\frac{14}{(3-\sqrt{2})}.\frac{(3+\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})}=\frac{14.(3+\sqrt{2})}{(3)^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{14.(3+\sqrt{2})}{9-2}=$$

$$=\frac{14.(3+\sqrt{2})}{7}=2.(3+\sqrt{2})$$

$$\frac{15}{\sqrt{5}+\sqrt{8}}=\frac{15}{(\sqrt{5}+\sqrt{8})}.\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{8})}{(\sqrt{5}-\sqrt{8})}=\frac{15.(\sqrt{5}-\sqrt{8})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{8})^2}=\frac{15.(\sqrt{5}-\sqrt{8})}{5-8}=$$

$$=\frac{15.(\sqrt{5}-\sqrt{8})}{-3}=-5.(\sqrt{5}-\sqrt{8})$$

Actividad

10-. Racionaliza las siguientes expresiones

$$\frac{3}{\sqrt{216}}= \qquad \frac{\sqrt[5]{216}}{\sqrt[5]{108}}= \qquad \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}=$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{75}}= \qquad \frac{9}{\sqrt{11}-\sqrt{2}}= \qquad \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=$$

Potencias de exponente fraccionario

Observemos las siguientes potencias:

$$\sqrt{a^6}=a^{\frac{6}{2}}=a^3 \qquad \sqrt[3]{a^{12}}=a^{\frac{12}{3}}=a^4 \qquad a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{2}}=a \qquad \sqrt{a}.\sqrt{a}=(\sqrt{a})^2=a$$

Estos ejemplos nos inducen a adoptar la siguiente definición para el caso de potencias de exponente fraccionario:

$$a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}\ ;\ donde\ \ a\ \epsilon\ \Re^+,\ \ n\ \epsilon\ Z,\ \ m\ \epsilon\ N$$

El numerador de un *exponente racional* es la ***potencia*** a la cual se eleva la base, y el denominador es el índice de la raíz que se tomará. La fracción ***m/n*** necesita estar en la forma reducida.

Conversión de radicales a exponenciales y viceversa

$$\sqrt{(x+y)^3}=(x+y)^{\frac{3}{2}} \qquad 3x.\sqrt[5]{x^2}=3x.x^{\frac{2}{5}}=3x^{\frac{7}{5}}$$

$$x^{\frac{2}{3}}.y^{\frac{1}{3}}=(x^2.y)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x^2.y} \qquad z^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{z^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{z^3}}$$

Actividad

11-. Expresa como radical las siguientes potencias y como potencia los radicales.

$2^{-\frac{3}{2}}=$

$\frac{1}{\sqrt[3]{2^4}}=$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{5}}=$

$\frac{1}{\sqrt[3]{3}}=$

https://www.youtube.com/watch?v=siysHF1FiAs
https://www.youtube.com/watch?v=Rwh0WSAGuXs

Para profundizar, recomendamos ver:

Micelli, Mónica; … [et.at]. "MATEMÁTICA: Serie Perspectivas". Santillana. Buenos Aires 2007- Página 23 a 46.

Bibliografía:

Chorny, Fernando; Salpeter, Claudio. "Matemática 1|2". Ediciones SM. Buenos Aires. 2010.

Flores Gil, Francisco Luis. "Matemáticas en la antigüedad". Ittakus. España. 2008.

Fuxman Bass, Juan Ignacio. "Resolviendo: problemas de matemáticas". Red Olímpica. Buenos Aires. 2010.

Guzman, M; Colera, J; Salvador, A. "Matemática 1 Bachillerato". Edic. Grupo ANAYA. España 1987.

Haeussler, F; Ernest, JR."Matemáticas para administración y economía". Décima edición.Pearson Educación. México. 2003

Demana, Franklin D. y cols. "Precálculo. Gráfico, numérico, algebraico". Séptima edición. Pearson Educación, México, 2007