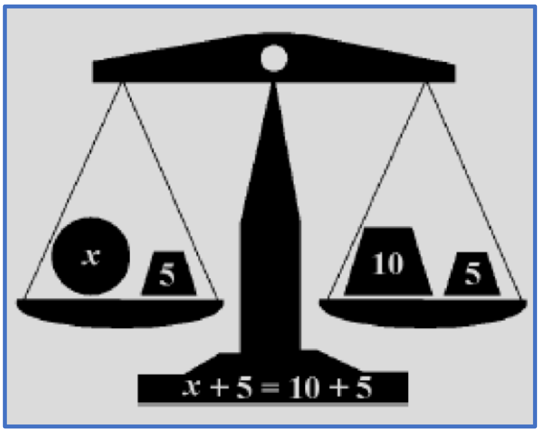
Situación 1

Pablo tiene una pareja de hámsteres con su camada de varias crías. A un amigo le regala la mitad de las crías que tiene, más media cría. A un segundo amigo le regala la mitad de las que quedan, más media cría. La cría que le queda se le regala a un tercer amigo. ¿Cuántas crías formaban la camada?

Extraído de "Matemática 1 Bachillerato" de .Guzmán, M., Colera, J y Salvador, A.

¿Qué es una Ecuación?

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que involucra una o más variables, llamadas **incógnitas.**



¿Cuándo decimos que un valor es solución de la ecuación? Cuando al reemplazar el valor de la incógnita por uno específico se cumple o satisface la igualdad, entonces es solución de la ecuación. Se denomina al conjunto de todos estos valores **conjunto solución** (*CS*)**.**

Ejemplo 1

Pruebe que x = - 2 es una solución de la ecuación $x^3 - x + 6 = 0$.

<u>Solución</u>

$$(-2)^3 - (-2) + 6 \neq 0$$

$$-8 + 2 + 6 \neq 0$$

$$0 \neq 0$$

Actividad

1-. Verificar si los siguientes valores de x son soluciones de la ecuación correspondiente. Justificar la respuesta.

a) $x = 5$, $x = 3$ y $x = -7$ $x^2 + 2x - 35 = 0$

b) $x = -2$, $x = 3$ y $x = 1$ $x^3 + 2x^2 = 2 + x$

Ecuaciones lineales

En particular, si la igualdad presenta alguna de las formas: ***a x + b = c***; donde ***a***, ***b*** y ***c*** son números reales y $a \neq 0$, o cualquier equivalente a una de esta forma, decimos que se trata de una **ecuación lineal**.

Para poder resolver una ecuación debemos conocer ciertas propiedades o leyes que nos darán la justificación a todo el procedimiento.

Leyes de monotonía

- Si sumamos o restamos una misma cantidad en ambos miembros de una ecuación, la igualdad se mantiene.
  A = B ⟶ A + C = B + C

Si tenemos la ecuación $x + 8 = 15$, podemos restar 8 a ambos lados para obtener la ecuación

x + 8 – 8 = 15 – 8

Es decir, obtenemos $x = 7$.

- Si multiplicamos o dividimos por una misma cantidad no nula en ambos miembros de una ecuación, la igualdad se mantiene.

Dada la ecuación $3x = 12$, podemos dividir a ambos lados por 3 para tener la ecuación

3/3 x = 12/3

de la cual obtenemos $x = 4$.

Al aplicar estas propiedades a una ecuación, obtenemos una ecuación más sencilla de resolver.

Ejemplo 2

Resuelva 2(2x - 3) + 3(x + 1) = 5x + 2. Compruebe el resultado con calculadora <u>Solución</u>

2(2x - 3) + 3(x + 1) = 5x + 2

4x – 6 + 3x + 3 = 5x + 2 Propiedad distributiva.

7x – 3 = 5x + 2 Reducimos los términos semejantes.

7x – 5x = 2 + 3 Sumamos 3 y restamos 5x en ambos miembros.

2x = 5 Reducimos los términos semejantes.

x = 5/2 Dividimos por 2 ambos miembros.

Para comprobar que x = 5/2 es solución de la ecuación debemos evaluar en ambos miembros.

2.[2.(5/2) – 3] + 3.[(5/2) + 1 = 5. (5/2) + 2 Con ayuda de una calculadora podrás comprobarlo.

Actividad

2-. Resolver las siguientes ecuaciones explicitando el conjunto solución.

a) $2x - 3 = 6 + x$

b) $2(2x - 3) = 6 + x$

c) $4(x - 10) = -6(2 - x) - 6x$

d) $\frac{2}{3}\left[x - \left(1 - \frac{x-2}{3}\right)\right] + 1 = x$

e) $\frac{3(1+2x)+5}{2} = 2(x + 2) + x$

f) $\frac{x+4}{2} = \frac{x}{11} + 11$

g) $\frac{2x+12}{3} = \frac{10x-30}{15} + 1$

h) $-3(2x - 5) - 5x = 3x$

Situación 2

Compré un martillo y un puñado de clavos, pagando un total de $75, habiendo pagado cuatro veces más por el martillo que por los clavos ¿Cuánto pagué por cada objeto?

Una vez leído el enunciado, podemos identificar dos incógnitas: el valor del martillo y el valor del puñado de clavos. Ambos valores están relacionados entre sí y, por lo tanto, podemos utilizar a cualquiera de ellos como incógnita de la ecuación con la que *modelizaremos el problema. Por ejemplo, si llamamos* x *al valor en* \$ *de los clavos, entonces el martillo valdrá* $4x$ *. La suma de ambas cantidades dará el total del dinero abonado y podemos representar esto por la ecuación* $4x + x = 75$*. Notar que en la ecuación planteada sumamos valores en* \$ *e igualamos a un valor en* \$*.*

Al resolver la ecuación planteada obtenemos:

$4x + x = 75$

$5x = 75$

$x = 15$

Una vez hallado el valor de x*, sabemos que el puñado de clavos vale* \$15 *y entonces el martillo que vale* 4 *veces el valor de los clavos, cuesta* 4.15 = 60*, o sea* \$60*.*

Si verificamos los valores hallados en el enunciado dado, vemos que la suma del valor del martillo y de los clavos será: 60 + 15 = 75 *y que el martillo vale cuatro veces el valor de los clavos. Concluimos que se cumplen las condiciones dadas en el enunciado.*

Respuesta al problema: El valor del martillo fue de \$60 *y del puñado de clavos fue de* \$15*.*

•

Extraído de "Matemática inicial para ingeniería"-Di Domenicantonio, Rossana y Otros. UNLP

Actividad

3-. Un número se multiplica por 9 y el resultado es el número aumentado en 112. ¿Cuál es el número inicial?

4-. Las longitudes de los lados de un triángulo escaleno son números impares consecutivos. El perímetro es 69 cm. ¿Cuáles son las longitudes de los lados del triángulo?

5-. Alejandro viajó en taxi. Si la bajada de bandera sale \$25 y por cada 100 metros recorridos se aumentan \$3, ¿cuántos kilómetros recorrió si pagó \$190?

6-. Eugenio tiene el triple de la edad que tenía hace 8 años. ¿Cuántos años tiene?

7-. Si regalo a un amigo la quinta parte de lo que tengo en mi billetera y a otro la cuarta parte de lo que me quedaba, me quedarán \$36. ¿Cuánto tengo?

8-. Este mes gané 5% más que el mes pasado. Lo mismo me pasó el mes pasado. En dos meses mi sueldo aumentó \$820. ¿Cuánto cobro ahora?

Ecuaciones Cuadráticas

Una **ecuación cuadrática** es una expresión que es equivalente a una de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$

Cada uno de los términos de la ecuación recibe un nombre en relación al exponente al que está elevada la variable, y estos son:

$$\underbrace{ax^2}_{\substack{Término\\cuadrático}} + \underbrace{bx}_{\substack{Término\\lineal}} + \underbrace{c}_{\substack{Término\\independiente}} = 0$$

Para resolver una ecuación de segundo grado o cuadrática tenemos diferentes situaciones según como se presente la ecuación.

- Cuando a la ecuación le falta el término independiente:

Ejemplo 3

Resolver la ecuación cuadrática $4x^2 + 8x = 0$.

<u>Solución</u>

Si $4x^2 + 8x = 0$, entonces lo podemos transformar en un producto; quedando $x. (4x + 8) = 0$, donde para ser solución debe cumplir que $x = 0$ o $4x + 8 = 0$, es decir, $x = -2$.

Por lo tanto, CS = {0, −2}.

- Cuando a la ecuación le falta el termino lineal.

Ejemplo 4

Resolver las ecuaciones cuadráticas $3x^2 – 12 = 0$ y $3x^2 + 12 = 0$.

<u>Solución</u>

Si $3x^2 – 12 = 0$, entonces no queda $x^2 = 4$; por lo que $x_1 = +2$ y $x_2 = -2$ son solución de la ecuación. Por lo tanto, CS = {−2, +2}.

Si $3x^2 + 12 = 0$, entonces no queda $x^2 = –4$; *por lo que la ecuación no tiene solución*. Es decir, CS = {}.

- Cuando la ecuación esta completa, o sea que ningún coeficiente es nulo, para encontrar los valores de x que satisfacen la ecuación debemos aplicar la formula

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Hay tres posibilidades para la cantidad de soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$: dos números reales y diferentes, dos números reales e iguales (en este caso se dice que la solución es doble), o sin solución en los reales. La cantidad de soluciones

depende del valor que tome $b^2 - 4ac$. A esta expresión la llamaremos **discriminante** y la denotaremos con la letra griega Δ (se lee delta).
Las tres posibilidades son:

- Si Δ > 0, tenemos dos raíces reales distintas

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

- Si Δ = 0, tenemos dos raíces reales coincidentes $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.
- Si Δ < 0, no tenemos raíces reales, es decir, la ecuación cuadrática no tiene solución.

Ejemplo 5

Encontrar las soluciones, si existen, de la ecuación $2x^2 - 8x + 6 = 0$.

Solución

Si $2x^2 - 8x + 6 = 0$

En este caso, tenemos que $a = 2$, $b = -8$ y $c = 6$.

Entonces, $\Delta = (-8)2 - 4.2. (6) = 64 - 48 = 16 > 0$, por lo que la ecuación tendrá dos soluciones reales distintas.

Aplicando la formula

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4.2.6}}{2.2}$$

Las mismas son $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$

Por lo tanto, CS = {1, 3}.

Actividad

9-. Encontrar, si existen, las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas

a) $x^2 + 2x + 1 = 4$

b) $x^2 - 5x + \frac{9}{4} = 0$

c) $-x^2 = -4x - 21$

d) $2x^2 - x + 3 = -1$

e) $\frac{x^2}{4} + x = 8$

f) $4x^2 + 10x + \frac{9}{4} = \frac{64}{9} + 4x$

g) $\frac{2}{3}x^2 - 2x = \frac{16}{3}$

10-. Calcular el discriminante de las siguientes ecuaciones y, sin resolver la ecuación, determinar la existencia de soluciones reales. Si existen, hallar los valores de las soluciones utilizando la fórmula.

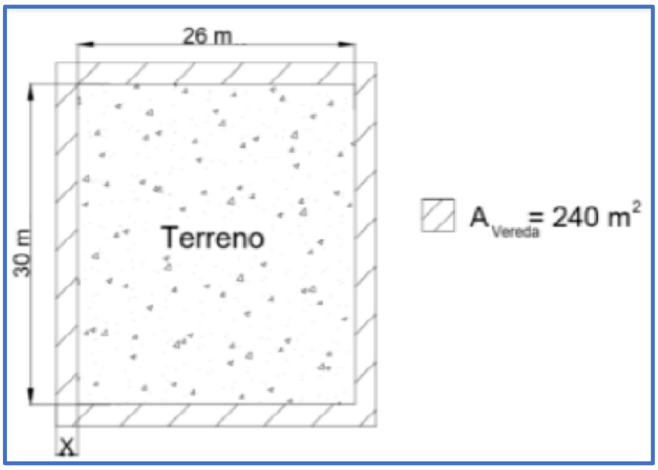
a) $x^2 + 2x + 1 = 4$ b) $2x^2 - x + 3 = -1$ c) $x^2 - 5x + \frac{9}{4} = 0$

d) $\frac{2}{3}x^2 - 2x = \frac{16}{3}$ e) $-x^2 = -4x - 21$

•

Situación 3

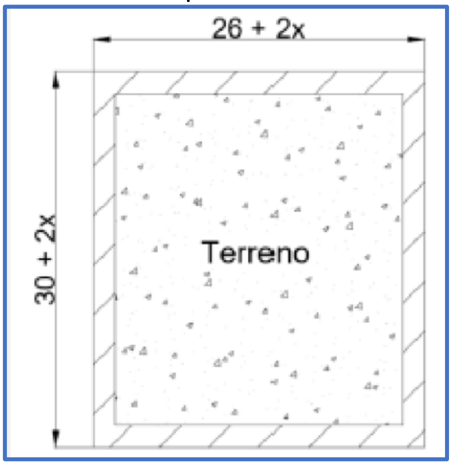
Un terreno rectangular de 26 metros de ancho por 30 metros de largo se debe rodear de una vereda de ancho uniforme. Si el área total de la vereda es de 240m^2 ¿cuál es el ancho de la vereda?



Observando la figura y los datos del problema, notamos que resulta conveniente definir x como el ancho en metros de la vereda y x es entonces la incógnita de la ecuación que queremos plantear.

Sabemos que el terreno rectangular tiene superficie: 26 m. 30 m = 780 m^2.

Ya que la vereda rodea al terreno, observemos que el largo y ancho de la figura más grande serán de 30 + $2x$ y de 26 + $2x$ respectivamente.



Notemos que los 240m^2 de vereda se corresponden con la resta de la superficie del rectángulo mayor menos la superficie del terreno. Esto nos lleva a plantear la ecuación

$(30 + 2x).\ (26 + 2x) - (26.30) = 240$

$780 + 60x.\ +52x + 4x2 - (780) = 240$

Agrupando los términos, resulta quedar la ecuación cuadrática

$4x^2 + 112x - 240 = 0$

de donde podemos observar que $a = 4$, que $b = 112$ y que $c = -240$.

Como $\Delta = (112)^2 - 4.4.\ (-240) = 16384 > 0$ sabemos que la ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales.

Resolvemos la ecuación cuadrática obtenida y hallamos esas dos soluciones que son: $x_1 = -30$ y $x_2 = 2$.

Recordemos que estamos en un contexto donde x representa la medida del ancho de una vereda. Por esta razón, aun cuando x_1 sea solución de la ecuación cuadrática planteada, no puede ser solución para el problema por ser negativa.

Por lo tanto, consideramos que $x_2 = 2m$ será el ancho de la vereda.

<u>Respuesta:</u> El ancho de la vereda será de 2 metros.

Si queremos verificar la solución hallada podemos calcular la superficie de la vereda, resultando: $34.30 - 780 = 1020 - 780 = 240$.

●

Extraído de "Matemática inicial para ingeniería"-Di Domenicantonio, Rossana y Otros. UNLP

●

Situación 4

¿Cuánto mide el lado de un cuadrado, sabiendo que si midiera 4 cm menos su área sería un noveno del área original?

Si llamamos x al lado del cuadrado, su área será x^2, y si el lado midiese 4 centímetros menos, tenemos que ahora el lado mide $x - 4$, por lo que su área es $(x - 4)^2$

Planteando que el área del nuevo cuadrado será un noveno del área de cuadrado original obtenemos la siguiente igualdad: $(x - 4)2 = 1/9\ .\ x^2$

Operando tenemos que

$9.\ (x^2 - 8x + 16) = x^2$

$9x^2 - 72x + 144 - x^2 = 0$

$8x^2 - 72x + 144 = 0$

$8.\ (x^2 - 9x + 18) = 0$

Si utilizamos la fórmula de Bhaskara obtenemos que $x_1 = 6$ y $x_2 = 3$.

Sin embargo, solo x_1 es respuesta de nuestro problema, ya que si el lado midiese 3 cm, no se le podrían restar 4 cm.

<u>Respuesta:</u> El lado del cuadrado debe ser de 6 cm.

Comprobación: Si el lado del cuadrado es de 6 cm, entonces el área es de 36 cm^2.

Si ahora les restamos 4 cm, tenemos que el lado mide 2 cm, y el área 4 cm^2, que es un noveno del área original, ya que 4 $cm2 = 36/9cm^2$.

●

Extraído de "Matemática inicial para ingeniería"-Di Domenicantonio, Rossana y Otros. UNLP

Actividad

11-. Un triángulo equilátero tiene una altura de 20 cm. ¿Cuál es su perímetro?

12-. En un triángulo equilátero ABC el lado $AB = x^2 + x$ y el lado $BC = 5x + 5$. Calcular el perímetro y el área del triángulo.

13-. Dados tres números naturales pares consecutivos, se sabe que la suma de los cuadrados de los dos primeros supera en 84 al cuadrado del tercero. Determinar cuáles son esos números.

14-. Determinar el número entero del cual se sabe que si sumamos el tercio de su siguiente más el cuadrado de su anterior da como resultado dos unidades menos que su cuádruple.

15-. La diferencia entre el cuadrado de la edad de Matías hace 5 años, y 10 veces su edad actual es 94, ¿cuál era su edad hace 5 años?

Inecuaciones lineales

Una **inecuación lineal** es una **desigualdad** en la que figuran variables o **incógnitas**. Pueden escribirse en la forma $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$, $ax + b > 0$, o $ax + b \geq 0$, donde a y b son números reales y $a \neq 0$.

Resolver una desigualdad en x significa determinar todos los valores de x para los que la desigualdad es verdadera.

Resolución de inecuaciones

Para resolver una inecuación, también es conveniente aplicar algunas propiedades (Leyes de monotonía) y así obtener una inecuación que tenga las mismas soluciones y sea más sencilla.

- Cuando el mismo número se suma o resta a ambos lados de una desigualdad, el sentido de la desigualdad no se altera.
- El sentido de la desigualdad se conserva si ambos lados se multiplican o dividen por el mismo número positivo.
- Si se multiplica o divide por un número negativo en ambos lados de una desigualdad, se debe invertir el sentido de la desigualdad.

El conjunto de soluciones de una desigualdad lineal en una variable forma un intervalo de números reales. Al igual que en el caso de las ecuaciones lineales, resolvemos una desigualdad lineal transformándola a una desigualdad equivalente cuyas soluciones sean obvias. Dos o más desigualdades son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto de soluciones.

Ejemplo 6

Resuelva 3(x - 1) + 2 ≤ 5x + 6

Solución

3(x - 1) + 2 ≤ 5x + 6

3x – 3 + 2 ≤ 5x + 6 Propiedad distributiva.

3x – 1 ≤ 5x + 6 Reducimos los términos semejantes.

3x – 5x ≤ 6 + 1 Sumamos 1 y restamos 5x en ambos miembros.

- 2x ≤ 7 Reducimos los términos semejantes.

x ≥ -7/2 Dividimos por - 2 ambos miembros.

El conjunto solución de la desigualdad es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales que – 7/2. En notación de intervalos, el conjunto solución se escribe [-7/2; +∞).

Extraído de "Precálculo. Gráfico, numérico, algebraico", Demana, Franklin D. y cols.

Ejemplo 7

Resuelva la desigualdad y grafique su conjunto solución.

$$-3 < \frac{2x+5}{3} \leq 5$$

Solución

$$-3 < \frac{2x+5}{3} \leq 5$$

-9 < 2x + 5 ≤ 15 Multiplicamos toda la expresión por 3.

-14 < 2x ≤ 10 Restamos 5 en toda la expresión.

-7 < x ≤ 5 Dividimos toda la expresión por 2.

El conjunto solución es el conjunto de todos los números reales mayores que -7 y menores o iguales a 5. En notación de intervalo, la solución es el conjunto (-7; 5].

Extraído de "Precálculo. Gráfico, numérico, algebraico", Demana, Franklin D. y cols.

Actividad

16-. Determinar si el número −1 verifica las siguientes inecuaciones:

a). $-2x - 5 \leq x + 1$

b). $4x - 2 > -x - 4$

17-. Resolver las siguientes inecuaciones y representar el conjunto solución en la recta real:

a) $5x + 4 \leq x - 8$

b) $3x < 6x + 8$

c) $x/2 + 3 > 0$

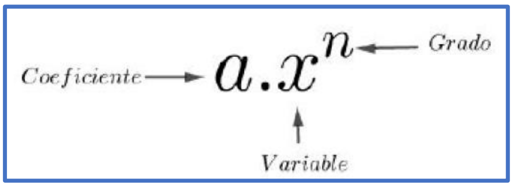
d) $-3(x + 4) \geq 9$

Polinomios

Un **polinomio** en la variable x es una expresión algebraica que puede expresarse de la forma $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$ en la que los coeficientes a_n, a_{n-1}, …, a_1, a_0 son números reales y n es un número natural.

Los **monomios** son expresiones algebraicas de la forma ax^n, en la que a es un número real y n es un número natural. Por lo tanto, un polinomio puede definirse como la suma de monomios.

Dado el monomio ax^n, con $a \neq 0$, la parte numérica a es el **coeficiente** del monomio y el exponente n de la variable x es el **grado** del monomio.



El **grado de un polinomio** es el mayor de los grados de sus términos o monomios. Si $a_n \neq 0$, tenemos que el grado es n y se denota $gr(P(x)) = n$.

El coeficiente a_n se llama **coeficiente principal**.

Si $a_n = 1$, el polinomio se llama **mónico**.

El término a_0 se conoce como **término independiente**. El término a_1x es el término lineal, a_2x^2 es el término cuadrático, a_3x^3 es el término cúbico, etc.

Observa que en el polinomio $P(x) = 2x^5 + 3x^4 - 5x - 1$, es de grado 5, con coeficiente principal igual a 2 y su término independiente es -1.

Un polinomio está **ordenado** cuando los monomios que lo componen están escritos en forma creciente o decreciente según sus grados. Para estudiarlos utilizaremos la forma decreciente.

Un polinomio está **completo** cuando tiene todos los términos, desde el término de mayor grado hasta el término independiente; esto se cumple cuando todos los coeficientes son distintos de cero.

Actividad

18-. Determinar cuál de las siguientes expresiones son polinomios, y en el caso de serlo hallar el grado, coeficiente principal y término independiente:

a) $M(x) = \frac{3}{x^2} + 2x + 1$

b) $P(x) = \frac{3}{2}x^4 + 2x^6 - 0x^9 + \sqrt{2} + 1$

c) $Q(x) = x^2 + 2x + x^5 - 2\sqrt{x}$

d) $E(x) = 3x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x + 5$

e) $H(x) = \sqrt{2}.x^3 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{2}x$

f) $N(x) = 5x^{-1} + 3x$

Operaciones entre polinomios

Suma o adición de polinomios

Para sumar dos polinomios, se agrupan los términos del mismo grado y se suman sus coeficientes.

•

Ejemplo 8

Sean $P(x) = 4x^4 + 6x^2 - 3x + 2$ y $Q(x) = 3x^4 - 7x^3 + 2x + 1$

$P(x) + Q(x) = 4x^4 + 6x^2 - 3x + 2 + 3x^4 - 7x^3 + 2x + 1$

Se asocian los términos de igual grado y resulta:

$P(x) + Q(x) = 7x^4 - 7x^3 + 6x^2 - x + 3$

Otra forma de sumar es completando cada uno de los polinomios y luego disponerlos uno de debajo de otro encolumnando los términos del mismo grado.

$$P(x) = 4x^4 + 0x^3 + 6x^2 - 3x + 2$$
$$Q(x) = 3x^4 - 7x^3 + 0x^2 + 2x + 1$$

$P(x) + Q(x) = 7x^4 - 7x^3 + 6x^2 - x + 3$

•

Si la suma de dos polinomios es igual al polinomio nulo, se cumple que los coeficientes de los términos de igual grado que los constituyen son números opuestos y los polinomios se llaman **polinomios opuestos**. Al opuesto de *P*(*x*) se lo indica –*P*(*x*).
Por ejemplo, el opuesto de polinomio $P(x) = -3x^5 + 2x^3 - 5x^2 - 3x$ lo podemos escribir como $-P(x) = 3x^5 - 2x^3 + 5x^2 + 3x$

Resta o sustracción de polinomios

Para restar dos polinomios, se suma el opuesto del sustraendo. Es decir, para efectuar P(x) – Q(x), debemos sumar a P(x) el opuesto de Q(x), entonces
P(x) – Q(x) = P (x) + [–Q (x)].

•

Ejemplo 9

Sean $P(x) = 5x^3 - 7x^2 + 3x - 1$ y $Q(x) = 8x^3 + 6x^2 - 4x$

Para calcular P(x) – Q(x), encontramos el opuesto de Q(x).

Luego $-Q(x) = -8x^3 - x^2 + 4x$.

Entonces $P(x) - Q(x) = P(x) + [-Q(x)] = 5x^3 - 7x^2 + 3x - 1 + (-8x^3 - x^2 + 4x)$

Eliminando el paréntesis y asociando los términos de igual grado:

$P(x) - Q(x) = 5x^3 - 8x^3 - 7x^2 - x^2 + 3x + 4x - 1$

Reduciendo la expresión con las operaciones correspondientes:

$P(x) - Q(x) = -3x^3 - 8x^2 + 7x - 1$

•

Multiplicación o producto de polinomios

Para multiplicar dos polinomios, aplicamos reiteradamente la propiedad del producto respecto de la suma y de la resta, luego agrupamos los términos de igual grado y así reducimos la expresión. Cabe mencionar que al multiplicar dos polinomios se obtiene otro polinomio.

•

Ejemplo 10

Sean $P(x) = 5x^3 + 4$ y $Q(x) = 3x^3 + 5x - 2$

Para hallar $P(x) \cdot Q(x) = (5x^3 + 4) \cdot (3x^3 + 5x - 2)$

Aplicamos la propiedad distributiva término a término:

$= 5x^3 \cdot (3x^3 + 5x - 2) + 4 \cdot (3x^3 + 5x - 2)$

$= 15x^6 + 25x^4 - 10x^3 + 12x^3 + 20x - 8$

Agrupando los términos semejantes

$P(x) \cdot Q(x) = 15x^6 + 25x^4 + 2x^3 + 20x - 8$

•

•

Ejemplo 11

En ocasiones esta forma de hacer el producto no es la más conveniente.

Si $P(x) = 5x^3 + 3x^2 - 3x + 4$ y $Q(x) = -4x^3 + 2x - 6$. Para encontrar el producto P(x) . Q(x).

Escribimos los dos polinomios, uno debajo del otro

Debajo, y en filas diferentes, escribimos los polinomios resultantes de multiplicar el primer polinomio por cada uno de los monomios del segundo polinomio.

Por último, sumamos los polinomios obtenidos.

$$\begin{array}{r}
5x^3 + 3x^2 - 3x + 4 \\
\text{x} \qquad -4x^3 + 2x - 6 \\
\hline
-30x^3 - 18x^2 + 18x - 24 \\
10x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 8x \qquad \\
-20x^6 - 12x^5 + 12x^4 - 16x^3 \qquad\qquad\qquad\qquad \\
\hline
-20x^6 - 12x^5 + 22x^4 - 40x^3 - 24x^2 + 26x - 24
\end{array}$$

$P(x) \,.\, Q(x) = -20x^6 - 12x^5 + 22x^4 - 40x^3 - 24x^2 + 26x - 24$

•

Actividad

19-. Dados los siguientes polinomios:

$P(x) = 3x^2 + 5x - 1$; $Q(x) = x^4 + (1/3)x^3 - (1/2)x + 5$; $R(x) = x + 2$ y $S(x) = 3x + 3$

Calcular y determinar el grado de los polinomios resultantes de hacer los siguientes cálculos:

16

a) $P(x) - S(x)$

b) $R(x).\,S(x)$

c) $Q(x) + R(x) + S(x)$

d) $(P(x) + R(x)) \cdot Q(x)$

e) $S(x) \cdot R(x) - P(x)$

f) $(P(x) + R(x)) \cdot (Q(x) - P(x))$

División o cociente de polinomios

División entre Polinomios

Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ con $Q(x) \neq 0$, existen únicos polinomios $C(x)$, llamado cociente, y $R(x)$, llamado resto, tales que $P(x) = Q(x).\,C(x) + R(x)$ con $gr(R(x)) < gr(Q(x))$.

- **EJEMPLO 12**

Para iniciar la división debemos colocar el dividendo y el divisor completo y ordenado siguiendo el algoritmo de la división con números.

En primer lugar, dividimos el primer término del dividendo por el primer término del divisor, obteniendo así el primer término del cociente y el primer resto parcial.

$$\begin{array}{rl|l}
 & 7x^4+5x^3+6x^2+0x+8 & 3x^2+5x-2 \\ \cline{3-3}
- & 7x^4+\frac{35}{3}x^3-\frac{14}{3}x^2 & \frac{7}{3}x^2 \\ \cline{2-2}
 & \underbrace{-\frac{20}{3}x^3+\frac{32}{3}x^2+0x+8}_{Resto\ parcial} &
\end{array}$$

Luego continuamos con el mismo procedimiento a partir del resto parcial obtenido, encontrando así el segundo término del cociente.

$$\begin{array}{rl|l}
 & 7x^4+5x^3+6x^2+0x+8 & 3x^2+5x-2 \\ \cline{3-3}
- & 7x^4+\frac{35}{3}x^3-\frac{14}{3}x^2 & \frac{7}{3}x^2-\frac{20}{9}x \\ \cline{2-2}
 & -\frac{20}{3}x^3+\frac{32}{3}x^2+0x+8 & \\
- & -\frac{20}{3}x^3-\frac{100}{9}x^2+\frac{40}{9}x & \\ \cline{2-2}
 & 0+\underbrace{\frac{196}{9}x^2-\frac{40}{9}x+8}_{Resto\ parcial} &
\end{array}$$

En este punto debemos preguntarnos si continuamos la división. En la división de números naturales, terminamos la “cuenta” cuando el resto es menor que el divisor.

En polinomios, miramos los grados. Cuando el **polinomio resto tenga grado menor al divisor, finaliza la operación.** En este caso, ambos tienen grado dos por lo que debemos continuar dividiendo.

$$
\begin{array}{l|l}
\boldsymbol{7x^4+5x^3+6x^2}+0x+8 & \boldsymbol{3x^2+5x-2} \\ \cline{2-2}
-\quad 7x^4+\frac{35}{3}x^3-\frac{14}{3}x^2 & \underbrace{\frac{7}{3}x^2-\frac{20}{9}x+\frac{196}{27}}_{Cociente\ C(x)} \\ \cline{1-1}
-\frac{20}{3}x^3+\frac{32}{3}x^2+0x+8 & \\
-\quad -\frac{20}{3}x^3-\frac{100}{9}x^2+\frac{40}{9}x & \\ \cline{1-1}
0+\frac{196}{9}x^2-\frac{40}{9}x+8 & \\
-\quad \frac{196}{9}x^2+\frac{980}{27}x-\frac{392}{27} & \\ \cline{1-1}
\underbrace{-\frac{1100}{27}x+\frac{608}{27}}_{Resto\ R(x)} &
\end{array}
$$

¡Ahora sí terminamos la división! Porque el grado del resto es uno, menor que el grado del divisor que es dos.

●

Actividad

20-. Efectuar las siguientes divisiones, indicando en cada ítem el polinomio cociente y el polinomio resto.

16

a) $(x^3 + 3x^2 - 4x - 12) : (x + 2)$

b) $(4x^5 + 6x^4 - 11x^3 + 21x^2) : (x^3 + 3x)$

c) $(2x^3 - 24x^2 + 4x^4 + 18x) : (2x^3 - 3x)$

d) $(4x^3 - 3x^2 + 7) : (2x - 6)$

e) $(x^3 + 3x^2 - 4x - 8) : (2x + 1)$

Regla de Ruffini

La regla de Ruffini permite dividir un polinomio *P*(*x*) por otro polinomio *Q*(*x*), tal que este último sea mónico y de grado uno.

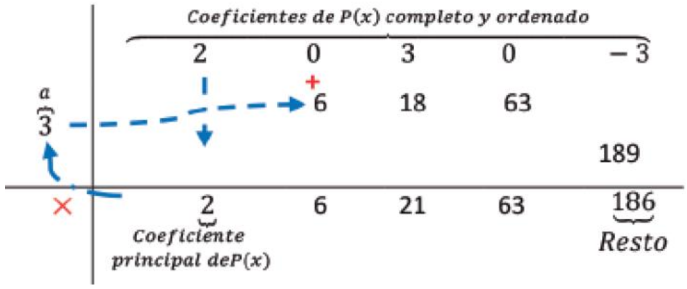
Es una forma práctica para dividir cualquier polinomio por un binomio de la forma "*x* – *a*" siendo *a* un número real.

●

EJEMPLO 13

Si tenemos que dividir $P(x) = 2x^4 + 3x^2 - 3$ por $Q(x) = x - 3$, podemos utilizar esta regla porque el polinomio divisor $Q(x)$ tiene la forma $x - a$.

Organizamos los coeficientes de esta manera:



Luego el cociente $C(x)$ se construye con los valores obtenidos como coeficientes y su grado es uno menos que el de $P(x)$:

$C(x) = 2x^3 + 6x^2 + 21x + 63$ y el último valor corresponde al *Resto* = 186.

●

Actividad

21-. Calcular el cociente y el resto de las siguientes operaciones, utilizando la Regla de Ruffini:
16

a) $(x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x + 2) : (x - 2)$

b) $(x^3 + 1) : (x + 1)$

c) $(x^3 + 3x) : (x + 2)$

d) $(x^2 - 5x + 6) : (x - 3)$

Valor numérico

El **valor numérico** del polinomio $P(x)$ para $x = a$ es el número que se obtiene al sustituir la variable x por el número a y efectuar las operaciones indicadas. Se representa por $P(a)$.

El valor numérico de $P(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ en $x = 2$ es

$P(2) = (2)^3 - 2.(2)^2 + 1 = 8 - 8 + 1 = 1$

Teorema del Resto

El resto de la división del polinomio $P(x)$ por $(x - a)$ es igual al valor numérico del polinomio $P(x)$ para $x = a$, es decir $P(a)$.

Este teorema permite, en particular, detectar fácilmente si un polinomio $P(x)$ es divisible por un polinomio de la forma $x - a$, simplemente viendo si $P(a) = 0$ o $P(a) \neq 0$.
$P(3) = 2.3^4 + 3.3^2 - 3$

●

Ejemplo 14

Podemos utilizar el teorema del resto para calcular el resto sin necesidad de hacer la división o para poder observar que coincida con este. Del ejemplo 13.

Si $P(x) = 2x^4 + 3x^2 - 3$ y $Q(x) = x - 3$,

$P(3) = 2(3)^4 + 3(3)^2 - 3 = 162 + 27 - 3 = 186$

Vemos que coincide con el resto en la regla de Ruffini.

●

Actividad

16

22-. Hallar el resto de dividir al polinomio $P(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 12$ por los siguientes polinomios utilizando el Teorema del Resto:

a) $(x + 2)$ b) $(x + 1)$ c) $(x - 1)$ d) $(x - 2)$

<u>Divisibilidad</u>

Cuando realizamos la división entre $P(x)$ y $Q(x)$ y el resto que obtenemos es

cero, decimos que $P(x)$ **es divisible por** $Q(x)$ y en tal caso, podemos expresar

$P(x)=Q(x)\cdot C(x)$. Para que $P(x)$ sea divisible por $(x - a)$, el resto de la división debiera ser cero. Si usamos el TEOREMA DEL RESTO, haciendo $P(x)$ en a, podemos calcular ese resto. Es decir, si $P(a) = 0$ (o a es raíz de P), entonces $P(x)$ es divisible por $(x - a)$.

En este caso es equivalente a decir que:

- $Q(x)$ divide a $P(x)$.
- $P(x)$ es divisible por $Q(x)$.
- $Q(x)$ es factor de $P(x)$.
- $P(x)$ es un múltiplo de $Q(x)$.
- $Q(x)$ es un divisor de $P(x)$.

Actividad

23-. Utilizando el Teorema del Resto, determinar si $P(x)$ es divisible por $Q(x)$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $P(x) = x^4 - 1$; $Q(x) = x - 1$

b) $P(x) = x^5 + 1/32$; $Q(x) = x + 1/2$

c) $P(x) = 3x^3 + 6x^2 - x - 7$; $Q(x) = x + 1$

d) $P(x) = x^4 - 54x^3 - 2x^2 + 7$; $Q(x) = x + 3$

Teorema Fundamental Del Álgebra

El ***Teorema Fundamental del Algebra*** nos asegura que todo polinomio de grado mayor o igual a uno, con coeficientes reales, puede descomponerse como un producto en función de sus raíces Reales.

Pero los polinomios no siempre todas las raíces o ceros son reales, en consecuencia, podemos asegurar que un polinomio ***P***, de grado ***n*** tiene como máximo ***n*** Raíces Reales.

Si $P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + \cdots + a_1.x + a_0$ es un polinomio de grado ***n***, donde $a_n;\ a_{n-1}, \ldots, a_1 y\ a_0$ son números reales, determinando que $x_0, x_1, \ldots, x_n$ raíces reales del polinomio ***P(x)***.

Lo podemos expresar como $P(x) = a_n.(x - x_0).(x - x_1) \ldots (x - x_n)$

De esta forma, podemos expresar el polinomio como un producto, este proceso se llama ***descomposición en factores primos***.

•

Ejemplo 15

Si P(x) = -3x + 5, como el polinomio es de grado uno tendrá una sola raíz. Para encontrarla, debemos igualarlo a cero y despejar el valor de x. -3x + 5 = 0 entonces x = 5/3. $P(x) = -3x + 5 = -3.(x - \frac{5}{3})$

Si P(x) = -x^2 + 3x + 4; para hallar las raíces, igualamos a cero, transformando el polinomio en una ecuación y luego aplicamos la fórmula resolvente o de Bhaskara.

$$-x^2 + 3x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4.(-1).4}}{2.(-1)}$$

$$x_1 = \frac{-3 + 5}{-2} = -1;\ x_2 = \frac{-3 - 5}{-2} = 4$$

$$P(x) = -x^2 + 3x + 4 = -1.(x + 1).(x - 4)$$

•

Cuando el polinomio tiene coeficientes enteros y además es de grado mayor que dos, podemos utilizar el Método de Gauss para encontrar todas las raíces de un polinomio de forma racional.

Método de Gauss

Si consideramos $P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + \cdots + a_1.x + a_0$ un polinomio de grado ***n* ≥ 3**, con sus coeficientes a_n; $a_{n-1}, \ldots, a_1 y\ a_0$ números enteros. Estamos es condiciones de aplicar el Método de Gauss que consiste:

- Tomar los valores del coeficiente principal a_n y del término independiente a_0.
- Listar todos los divisores de ellos, por separado.
- Formar todas las combinaciones de $\frac{Divisores\ de\ a_0}{Divisores\ de\ a_n}$, que son las posibles raíces racionales.
- Aplicando el Teorema del Resto, podemos establecer cuál o cuáles de esos valores son raíces.
- En muchas ocasiones, este procedimiento puede ser largo, por ello no calculamos todas las raíces, solo las que nos permiten por medio de Ruffini bajar su grado para poder aplicar la fórmula resolvente.
- Una vez obtenida una raíz *a*, podemos dividir por el polinomio *x* – *a* con la REGLA DE RUFFINI.

-

Ejemplo 16

Descompone en producto de factores primos el polinomio $P(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 24$

$P(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 24$

- El Coeficiente principal es 1 y el término independiente es -24.
- Los divisores del término independiente son: ±1; ±2; ±3; ±4; ±6; ±8; ±12; ±24
- Los divisores del coeficiente principal son: ±1
- Las combinaciones posibles de la forma $\frac{Divisores\ de\ a_0}{Divisores\ de\ a_n}$: ±1; ±2; ±3; ±4; ±6; ±8; ±12; ±24 (como el polinomio es mónico, este conjunto coincide con los divisores del T. independiente).
- Aplicamos el teorema del resto para encontrar una raíz, dado que tenemos 16 posibles raíces.

$P(2) = (2)^3 + 5.(2)^2 - 2.(2) - 24 = 0 \rightarrow$ ***x* = 2** es raíz

$$(x^3 + 5x^2 - 2x - 24):(x - 2) =$$

	1	5	-2	-24
2		2	14	24
	1	7	12	0

Podemos las otras raíces de P(x) del polinomio cociente de esta división ***C(x) = x*² + 7*x* + 12**

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4.1.12}}{2.1} = \frac{-7 \pm 1}{2} = \{x_1 = \frac{-7+1}{2} = -3\ x_2 = \frac{-7-1}{2} = -4$$

Las raíces del polinomio P(x) son $\boldsymbol{x_1 = 2; x_2 = -3; x_3 = -4}$

$$P(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 24 = 1.(x-2).(x+3).(x+4)$$

•

Actividad

24-. Encuentra las raíces de los siguientes polinomios y exprésalos como un producto en función de sus raíces.

a) $P(x) = x^3 - 7x + 6$ 16

b) $R(x) = x^3 + 7x^2 + 14x + 8$

c) $P(x) = 6x^3 - 5x^2 - 2x + 1$

d) $Q(x) = 50x^3 + 25x^2 - 2x - 1$

e) $R(x) = 8x^3 - 6x^2 - 5x + 3$

f) $S(x) = 4x^3 - 7x - 3$

Factorización de Polinomios

Un polinomio $P(x)$ de grado $n \geq 1$ es **irreducible** si no se puede escribir como producto de polinomios de la forma $P(x) = Q(x).C(x)$, donde $Q(x)$ y $C(x)$ tienen ambos grados menores que n o uno de ellos es mónico y con el mismo grado de $P(x)$ y el otro es una constante distinta de 1.

El proceso de **factorizar un polinomio** consiste en expresarlo como producto de otros polinomios.

Para poder encontrar esta factorización, se puede utilizar distintos procedimientos o una combinación de ellos.

Factor común

Cuando hay un factor que está repetido en todos los términos de un polinomio podemos sacarlo como factor común. Este es el proceso contrario a la propiedad distributiva.

Si $\boldsymbol{P(x) = 7x^6 + 28x^5 - 35x^4 = 7x^4.(x^2 + 4x - 5)}$

De esta última expresión, observamos que $\boldsymbol{x = 0}$ es una raíz del polinomio. Las otras raíces las encontramos buscando las raíces de $\boldsymbol{x^2 + 4x - 5 = 0}$

Factor común por grupos

Algunos polinomios presentan una estructura que nos permite formar grupos con la misma cantidad de términos y sacar factores comunes en cada uno de esos grupos. Una vez hecho esto, aparece un nuevo factor común, podemos luego extraer como factor común los factores repetidos y, de esa manera, obtener una nueva expresión que esté escrita como producto de polinomios.

Si $Q(x) = x^3 + 6x^2 - 3x - 18 = (x^3 + 6x^2) + (-3x - 18) = x^2. (x + 6) - 3. (x + 6) = (x + 6). (x^2 - 3)$

De esta última expresión, observamos que $x_1 = -6$ es una raíz del polinomio. Las otras raíces las encontraremos haciendo $x^2 - 3 = 0 \longrightarrow x_2 = +\sqrt{3}$ y $x_3 = -\sqrt{3}$

Trinomio cuadrado perfecto

Si reconocemos un trinomio con las siguientes características $x^2 + 2ax + a^2$ (dos términos elevados al cuadrado y el tercero el doble producto de las raíces cuadrada de los anteriores), entonces lo podemos expresar como el cuadrado de un binomio $(x + a)^2$.

Por ejemplo, si $S(x) = x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2.x.5 + 5^2 = (x + 5)^2$

Observamos que x = -5 es raíz del polinomio.

Cuatrinomio cubo perfecto

Si reconocemos un cuatrinomio con las siguientes características $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$ (un cuatrinomio con dos de los términos cubos perfectos, y los otros dos son el triple producto de un término al cuadrado por el otro), entonces lo podemos escribir como el cubo del binomio $(x + a)^3$.

Por ejemplo, si $R(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = x^3 - 3. x^2 .2 + 3. x. 2^2 + 2^3 = (x - 2)^3$

Observamos que x = 2 es raíz del polinomio

Diferencia de cuadrados

Si reconocemos un binomio con la forma $x^2 - a^2$ (una diferencia de término cuadrado perfecto) lo podemos transformar como un producto de binomios conjugados de la forma $(x - a) . (x + a)$

Por ejemplo, si $T(x) = x^2 - 49 = x^2 - 7^2 = (x - 7). (x + 7)$

Actividad

25-. Factoriza los siguientes polinomios

16

a) $P(x) = x^6 + 11x^4 - 2x^2$

b) $P(x) = -4x^3 - 2x^2$

c) $P(x) = 14x^5 - 7x^3 + 21x$

d) $P(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4$

e) $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 10$

f) $P(x) = x^6 + 3x^5 + 2x^4 - 4x^2 - 12x - 8$

g) $P(x) = x^5 + x^3 + 3x^4 + 3x^2$

h) $P(x) = x^2 + 12x + 36$

i) $P(x) = 2x^2 - 8x + 8$

j) $P(x) = x^2 - 2x + 1$

k) $P(x) = x^4 + 8x^2 + 16$

l) $P(x) = x^3 – 9x^2 + 27x – 27$

m) $P(x) = x^3 + 18\,x^2 + 108x + 216$

n) $P(x) = 27/8\,x^3 – 27/2\,x^2 + 18x – 8$

ñ) $P(x) =1/8\,x^3 – 15/4\,x^2 + 75/2\,x -125$

o) $P(x) = x^2 – 49$

p) $P(x) = 2x^2 – 32$

q) $P(x) = x^4 – 16$

r) $P(x) = x^2 – 10$

SUGERENCIAS PARA FACTORIZAR POLINOMIOS

Por lo general, cuando tenemos que factorizar o descomponer un polinomio, debemos trabajar muy metódicamente para que nuestro resultado sea eficiente.

• En primer lugar buscar extraer un factor común.

• En segundo lugar, contamos la cantidad de términos.

- Si es un binomio, analizamos si es una diferencia de cuadrados.

- Si es un trinomio, analizamos si es un trinomio cuadrado perfecto.

- S es un cuatrinomio, analizamos si es un cuatrinomio cubo perfecto o tratamos de agrupar y utilizar factor común por grupo.

• Si es de segundo grado, aplicamos la fórmula resolvente.

• Si no podemos utilizar algunos de los pasos anteriores, y es de grado mayor a dos pueden encontrar una raíz aplicando el Teorema de Gauss (recuerden que sus coeficientes deben ser números enteros), aplicar el algoritmo de Ruffini para hallar el cociente y expresar el dividendo como divisor por cociente. Si es necesario, aplicar nuevamente este procedimiento o cualquier otro que consideren conveniente.

Fracciones algebraicas

Las divisiones de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, donde $Q(x) \neq 0$, se puede representar como una fracción, que llamaremos **expresión algebraica racional.**

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

Estas expresiones son válidas siempre que el denominador no valga 0. Es decir, para aquellos valores tales que $Q(x) = 0$ son valores donde no está definida la fracción algebraica.

Al conjunto de valores en los que se puede evaluar una fracción algebraica se lo llama **conjunto de validez** y, normalmente, se abrevia C.V. Este conjunto está formado por todos los números reales, excepto aquellos números que no se pueden evaluar porque provocan una operación no definida (ya que anulan alguno de los denominadores de la fracción).

●

Ejemplo 17

$$\frac{2x-5}{x}\ ;CV = R - \{0\}$$

$$\frac{x^2-9x}{x+2}\ ;CV = \ R - \ \{-2\}$$

$$\frac{x^3+x^2-4x-4}{x^2-4x+3}\ ;CV = \ \ R - \ \{1;3\}$$

●

Una expresión algebraica es **irreducible** si no existen en ella factores comunes al numerador y al denominador.

Simplificación de expresiones algebraicas fraccionarias

Para **simplificar una expresión algebraica fraccionaria**, se debe factorizar el numerador y el denominador, y cancelar los factores comunes en ambos; se obtiene así una expresión irreducible equivalente a la original.

●

Ejemplo 18

$$\frac{x^2-x}{x^3+x^2-2x} = \frac{x.(x-1)}{x.(x^2+x-2)} = \frac{x.(x-1)}{x.(x-1).(x+2)} = \frac{1}{x+2}\ ;CV \ = \ R - \{0;1;\ -2\}$$

$$\frac{x^2-4}{x^3-2x^2} = \frac{(x-2).(x+2)}{x^2.(x-2)} = \frac{x+2}{x^2};CV \ = \ R - \{0;2\}$$

$$\frac{x^3+3x^2+2x+6}{x^2+6x+9} = \frac{(x^3+3x^2)+(2x+6)}{(x+3)^2} = \frac{x^2(x+3)+2(x+3)}{(x+3)^2} = \frac{(x+3).(x^2+2)}{(x+3)^2}$$
$$= \frac{(x^2+2)}{(x+3)}\ ;\ \ CV = \ R - \{-3\}$$

●

Actividad

26) Hallar el conjunto de validez de las siguientes fracciones algebraicas. En los casos en que sea posible, hallar la fracción algebraica equivalente irreducible:

a) $\frac{-7x^3+14x^2-7x}{x^3-4x}$

b) $\frac{-3x^4+3}{x^2-x-2}$

c) $\frac{x^2+5x+6}{x^3+3x^2}$

d) $\frac{x^4+3x^2+2}{x^2-10x+25}$

Operaciones con fracciones algebraicas

Del mismo modo que trabajamos con fracciones numéricas para sumar, restar, multiplicar y dividir; lo hacemos con las expresiones fraccionarias con la diferencia que ahora trabajamos con polinomios.

Suma y resta de fracciones algebraicas

Para sumar o restar fracciones algebraicas se reducen a expresiones que tengan igual denominados, para luego operar con los numeradores.

-

Ejemplo 19

$$\frac{4x}{x-3}-\frac{2x-5}{x-3}+\frac{1}{x-3}=\frac{4x-(2x-5)+1}{x-3}=\frac{4x-2x+5+1}{x-3}=\frac{2x+6}{x-3}$$

$$\frac{x+1}{x}+\frac{x-2}{x^2+x}-\frac{2x-1}{x+1}=\frac{x+1}{x}+\frac{x-2}{x.(x+1)}-\frac{2x-1}{x+1}$$
$$=\frac{(x+1)(x+1)+x-2-x.(2x-1)}{x.(x+1)}$$
$$=\frac{x^2+x+x+1+x-2-2x^2+x}{x.(x+1)}=\frac{-x^2+4x-1}{x.(x+1)}$$

-

Actividad

27) Realizar las siguientes operaciones y escribir el conjunto de validez:

a) $\frac{x^3-7x^2}{x^2-3x-28}+\frac{x}{x^2-16}$

b) $\frac{x+7}{x^2-7x+12}-\frac{3x+12}{x^2-16}$

c) $\frac{x^2-4x-5}{x^3+3x^2+3x+1}+\frac{3}{x^2-1}+\frac{2x}{x^2+2x+1}$

d) $\frac{4x+2}{2x^2-7x-4}-\frac{6}{3x-12}$

Multiplicación y división de fracciones algebraicas

El producto de dos fracciones algebraicas es otra fracción algebraica que tiene como numerador el producto de sus numeradores y, como denominador, el producto de sus denominadores. Antes debemos factorizar numerador y denominados de ambas expresiones y simplificar todo lo posible.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}.\frac{R(x)}{S(x)}=\frac{P(x).R(x)}{Q(x).S(x)}$$

Para dividir dos fracciones algebraicas, debemos invertir el divisor y convertir la operación en una multiplicación. Ahora debemos seguir todas lo dicho anteriormente.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}:\frac{R(x)}{S(x)}=\frac{P(x)}{Q(x)}.\frac{S(x)}{R(x)}=\frac{P(x).S(x)}{Q(x).R(x)}$$

•

Ejemplo 20

$$\frac{x+2}{2x^2-x}.\frac{x^2}{x^2-4}=\frac{x+2}{x.(2x-1)}.\frac{x^2}{(x-2).(x+2)}=\frac{x}{(2x-1).(x-2)}$$

$$\frac{x}{3}:\frac{2x}{x+1}=\frac{x}{3}.\frac{x+1}{2x}=\frac{x+1}{6}$$

$$\frac{x+3}{x^2+2x}:\frac{x}{x+2}=\frac{x+3}{x.(x+2)}.\frac{x+2}{x}=\frac{x+3}{x^2}$$

•

Actividad

29). Realizar las siguientes operaciones y escribir el conjunto de validez:

$$\frac{x^2+x-2}{x^2+4x+4}.\frac{x-3}{x^2-4x+3}$$

$$\frac{x^2-4x-5}{x^3+3x^2+3x+1}.\frac{x^2-1}{x}.\frac{2x}{x^2+2x+1}$$

$$\frac{2x^2+5x-3}{4x^2+4x}:\frac{3}{4x}$$

$$\frac{x^2-4}{2x^2+8x+8}:\frac{x^3+x^2}{2x+2}$$

$$\frac{x^2-4x-5}{x^3+3x^2+3x+1}:\frac{x}{x^2-1}$$

30). Realizar las siguientes operaciones combinadas

a) $\frac{x^2+3x}{x^2-2x}+\frac{2x^2-8x+8}{x^2+x-6}:\frac{x^2-2x}{5x^2+15x}$

b) $\frac{x^2-5x-14}{x^2-49}\cdot\frac{3x^2-3x}{x^2+x-2}-\frac{2x+10}{x^2+6x-7}$

c) $\frac{12x-12}{x^2+2x}\cdot\left[\frac{x^3+2x^2+x}{3x^2-3}+\frac{x^2+x-6}{6x^2+12x-18}\right]$

Bibliografía:

Guzman, M; Colera, J; Salvador, A. “Matemática 1 Bachillerato”. Edic. Grupo ANAYA. España 1987.

Demana, Franklin D. y cols. “Precálculo. Gráfico, numérico, algebraico”. Séptima edición. Pearson Educación, México, 2007.

Rossana Di Domenicantonio ; Noemí Lubomirsky ; Ana Lucía Rivera. “Matemática inicial para ingeniería” - 1ª ed . - La Plata: EDULP, 2019.