PAU 2021

Funciones

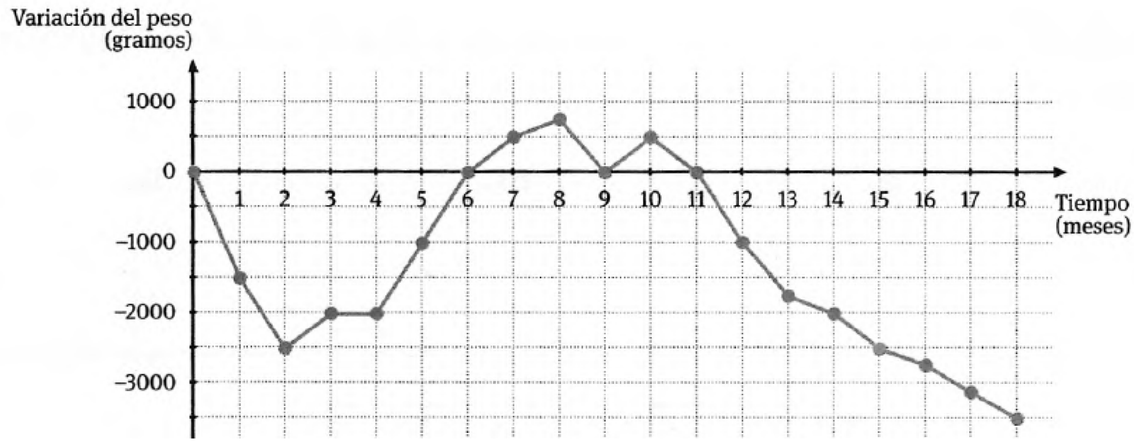
Las funciones describen fenómenos de todas las ciencias. Los biólogos hacen el estudio del comportamiento de las colonias de bacterias, el crecimiento de las plantas o un ecónomo puede llegar a estimar el comportamiento de los mercados utilizando las funciones para el análisis de la variabilidad. Es más, los periódicos utilizan las representaciones gráficas de las funciones para poder ilustrar y transmitir, de una forma rápida y simple el comportamiento de las variables intervinientes.

El matemático que introdujo los términos variable, constante, función y abscisa fue Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716). Leibniz fue un filósofo, matemático y estadista alemán, considerado uno de los mayores intelectuales del siglo XVII. Nacido en Leipzig, se educó en las universidades de esa ciudad, de Jane y de Altdorf.

La contribución de Leibniz a la Matemática consiste en enumerar, en 1675, los principios fundamentales del cálculo infinitesimal. En 1672 también inventó una máquina de calcular capaz de multiplicar, dividir y extraer raíces cuadradas. Es considerado un pionero en el desarrollo de la lógica matemática.

Situación 1

La doctora Diet, nutricionista, registra una vez al mes, en un gráfico cartesiano, la variación del peso, en gramos, de sus pacientes en función del tiempo de tratamiento. Este gráfico corresponde a la señora Pacient, quien comenzó la dieta con 98 kg y realiza su consulta a la doctora Diet una vez por mes.



a). ¿Cuánto pesaba el paciente en la tercera consulta?

b). ¿Cuánto aumento entre el cuarto y quinto mes?

c). ¿En qué mes alcanzó su menor peso?¿Y el mayor?

d).¿En qué periodos bajó de peso?¿En qué periodo subio de peso?

e). ¿Hubo algun momento en el que su peso no varió?

f). ¿En qué meses la paciente volvió a pesar lo mismo que al comenzar el tratamiento?

Extraído de "Matemática I, de la practica a la formalización". Kurzrok, Liliana E.- Comparatore, Claudia R.

Función. Dominio e Imagen.

Una **función** es una **relación** entre dos variables, una la llamamos variable independiente (**x**) y a la otra la llamamos variable dependiente (**y**). Esta relación es un vínculo que se establece entre las variables que asigna a cada valor de **x** un único valor de **y**.

Por lo general, cuando hacemos la representación gráfica sobre un par de eje cartesianos, ubicamos la variable independiente **x** en el eje horizontal (o de las abscisas) y la variable dependiente **y** en el eje vertical (o de las ordenadas). La función queda representada por todos los puntos o pares ordenados (**x; y**) que cumplen con esa relación.

Lo escribimos: $f : A \to B$

$x \to f(x)$

Se puede leer: "***f*** es una función de **A** en **B**", donde a cada valor **x** del conjunto **A** se le asigna un único valor **y** de **B**. El conjunto **A** se llama dominio de ***f*** o conjunto de partida, mientras que **B** se llama conjunto de llegada.

El **dominio** de una función ***f*** es el conjunto formado por todos los valores que toma la variable independiente **x** y se simboliza **Dom(f)** o **Domf**.

El **codominio** de una función ***f*** es un conjunto que contiene a todos los valores que puede tomar la función.

Cada elemento **y** del conjunto **B** (codominio) que esté asociado a un elemento ***x*** del conjunto **A** (dominio) se llama **imagen** de **x** y se escribe ***f(x)***. El conjunto formado por todas las imágenes de los elementos del dominio de ***f*** se llama ***imagen o rango de f*** y se simboliza ***Im(f)*** o ***Imf***.

De nuestra situación inicial, podemos decir que el dominio de la función dom(f) es el intervalo [0, 18] y representa el tiempo del tratamiento medido en meses.

Para este ejemplo, la imagen representa la variación del peso que se mide en gramos, que toma valores dentro del intervalo [-3500, 750].

Para estudiar cómo se relacionan dos magnitudes o variables es importante recolectar dato y organizarlos de tal forma que nos ayude a un análisis posterior. Los datos los podemos disponer en tablas o en gráficos sobre los ejes cartesianos.

Una función se puede representar de diferentes formas; a través de un dibujo o diagrama, de una tabla de valores, de un gráfico, de una fórmula.

Ejemplo 1

En cada caso, encuentra f(2) y f(-3) e indique el dominio de la función.

$f(x) = 3x + 5$ $\qquad$ $g(x) = \sqrt{6 - x}$ $\qquad$ $h(x) = \frac{1}{x}$

Solución: Para encontrar el dominio de la función debemos observar que valores admite la variable independiente.

En f(x), el dominio es el conjunto de todos los números reales y se indica, *Dom (f)= R*; $f(2) = 3.2 + 5 = 11$, $f(-3) = 3.(-3) + 5 = -4$; lo que indica que los puntos (2, 11) y (-3, -4) pertenece a la gráfica de la función.

En g(x), el dominio de la función serán aquellos valores de x tal que *6 – x ≥ 0*, dado que el radicando de una raíz cuadrada no puede ser negativo. Por lo que, *x ≤ 6, Dom (g) = (-∞; 6]*

$g(2) = \sqrt{6-2} = 2$; $g(-3) = \sqrt{6-(-3)} = 3$. Los puntos (2, 2) y (-3, 3) pertenecen a la grafica de la función *g(x)*.

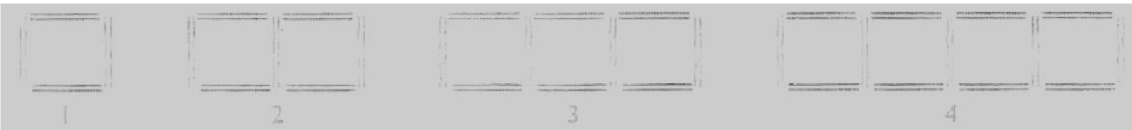
En h(x), el dominio serán todos los números reales distinto de cero, dado que en la división no está admitido que el divisor sea cero. Lo indicamos, Dom(h)= R – {0}.

$$h(2) = \frac{1}{2} \qquad\qquad h(-3) = \frac{1}{(-3)} = -\frac{1}{3}$$

Los puntos (2, ½); y (-3; -1/3) son puntos que pertenecen a la gráfica de la función.

Actividad

1-. Se construye una sucesión de figuras con palillos, como la siguiente:

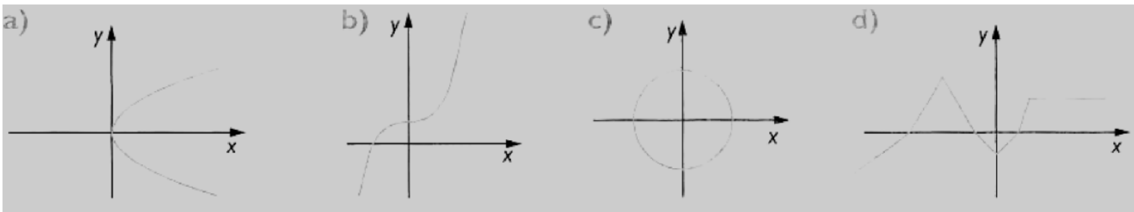


a). ¿Cuántos palillos se necesitan para construir la figura que ocupa el octavo lugar? ¿Y la que ocupa el lugar 35?

b). Encuentren una fórmula que permita calcular la cantidad de palillos que se necesitan para construir la figura que ocupa el lugar n.

c). ¿Hay alguna figura que tenga 58 palillos? ¿Y 299 palillos? ¿Por qué?

2-. ¿Cuáles de los siguientes gráficos no pueden corresponder a funciones? ¿Por qué?



3-. Realicen el gráfico aproximado de las siguientes funciones. Indica el dominio de cada una.

$f(x) = 2x - 1$ $\quad$ $g(x) = \sqrt{x}$ $\quad$ $h(x) = \frac{3}{x}$ $\quad$ $j(x) = 3$

4-. ¿Cuál es el dominio de la función $h(x) = \sqrt{3x - 6}$ y cuál es la imagen de h(x) para ese dominio?

Extraído de "Matemática4ES. Huellas". Chorny, F. Salpeter, C. Casares, P.

Situación 2

El gráfico muestra el registro de temperaturas para un día típico de mediados de invierno en cierta región del país.

¿Cuáles son las variables que se relacionan?

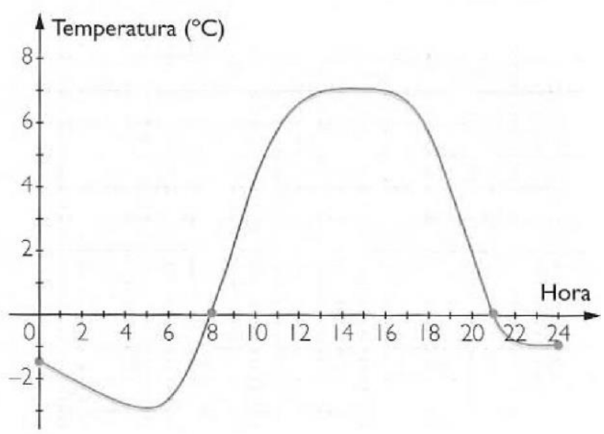
¿Qué variable está en función de la otra?

¿Cuál es el dominio de la función?

¿En qué momentos la temperatura fue de 0ºC?

¿En qué momentos la temperatura estuvo por encima de los 0ºC?

¿En qué momentos la temperatura estuvo por debajo de 0ºC?



Extraído de "Matemática4ES. Huellas". Chorny, F. Salpeter, C. Casares, P.

Intersección con los ejes.

Llamamos **Ordenada al Origen** al punto de intersección de la representación gráfica de la función con el eje de ordenadas (y). Se encuentra haciendo x = 0, si *f (0) = b*; entonces el punto (0, b) es la ordenada al origen.

Estudiar la **intersección** de la gráfica de una función **con el eje *x*** es determinar **para qué valores de *x*** se cumple que *f*(*x*) = 0. En otras palabras, es preguntarnos sobre los valores del dominio que anulan la función. Se denomina a estos valores **raíces o ceros** de la función. Y a su conjunto se lo simboliza $\mathbf{C^0}$.

Conjunto de positividad y negatividad.

Cuando analizamos si la gráfica de la función está por debajo o encima del eje es establecer para qué valores del dominio la función es positiva y para cuáles es negativa.

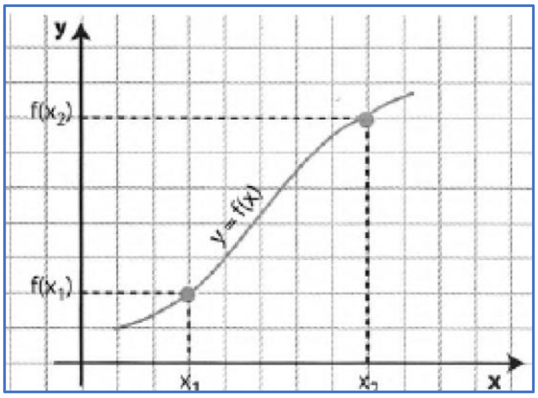
Se denomina al conjunto de todos los valores del dominio para los que la función es positiva ***conjunto de positividad*,** y al conjunto de todos los valores del dominio para los que la función es negativa, **conjunto de negatividad.** Se denotan respectivamente:
C^+ y C^-.

Crecimiento y decrecimiento.

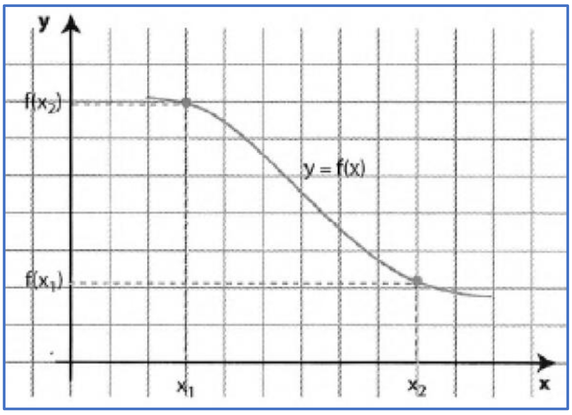
Otro elemento muy importante a estudiar y analizar de una función son los **intervalos de crecimiento** (**I**↑) y de **decrecimiento** (**I**↓).

Si a medida que aumenta la variable independiente también lo hace la variable dependiente, decimos que la función es creciente para esos valores del dominio. En cambio, si a medida que aumenta *x* la variable *y* disminuye, decimos que la función es decreciente para esos valores del dominio.

Podemos definir que ***f*** es **creciente** si se verifica que $x_1 < x_2$; entonces, $f(x_1) < f(x_2)$; donde x_1 y x_2 son valores cualesquiera del dominio de ***f***.



De la misma manera podemos definir que ***f*** es **decreciente** si se verifica que $x_1 < x_2$; entonces, $f(x_1) > f(x_2)$; donde x_1 y x_2 son valores cualesquiera del dominio de ***f***.



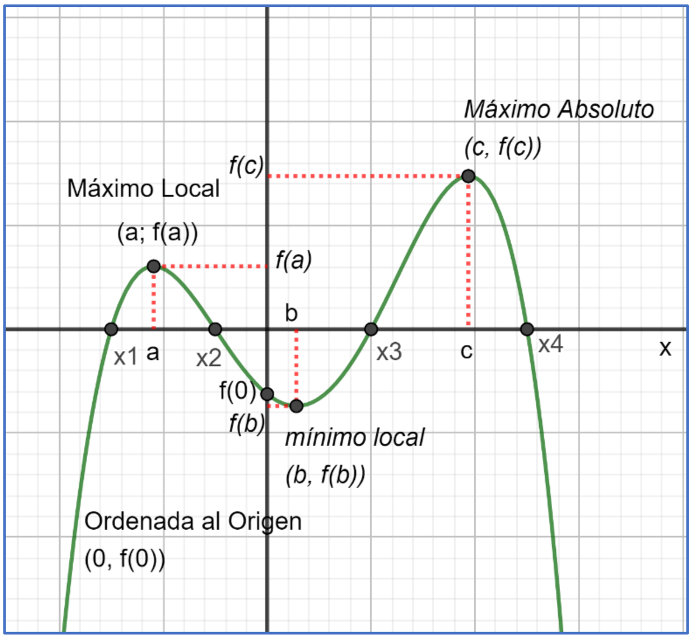
Máximo y mínimo

La función **f** alcanza un **Máximo local o relativo** en un punto $\mathbf{x_0}$, si $f(x_0)$ es mayor o igual a todos los valores que toma la función en los puntos "próximos" a $\mathbf{x_0}$, es decir, si $f(x_0) \geq f(x)$ para valores de **x** "cercanos" a $\mathbf{x_0}$.

Ese **Máximo** será **absoluto** en $\mathbf{x_0}$, si $\boldsymbol{f(x_0)}$ es mayor o igual que todos los valores que toma la función en los puntos de su dominio, es decir, si $\boldsymbol{f(x_0) \geq f(x)}$ para cualquier valor de **x** perteneciente al dominio de ***f***.

La función **f** alcanza un **mínimo local o relativo** en un punto $\mathbf{x_0}$, si $\boldsymbol{f(x_0)}$ es menor o igual a todos los valores que toma la función en los puntos "próximos" a $\mathbf{x_0}$, es decir, si $\boldsymbol{f(x_0) \leq f(x)}$ para valores de **x** "cercanos" a $\mathbf{x_0}$.

Ese **mínimo** será **absoluto** en $\mathbf{x_0}$, si $\boldsymbol{f(x_0)}$ es menor o igual que todos los valores que toma la función en los puntos de su dominio, es decir, si $\boldsymbol{f(x_0) \leq f(x)}$ para cualquier valor de **x** perteneciente al dominio de ***f***.



Ordenada al Origen: (0; *f(0)*)

Ceros o Raíces: $C^0 = \{x_1; x_2; x_3; x_4\}$

Conjunto de Positividad

$C^+ = (x_1; x_2) \cup (x_3; x_4)$

Conjunto de Negatividad

$C^- = (-\infty; x_1) \cup (x_2; x_3) \cup (x_4; +\infty)$

Intervalo de crecimiento:

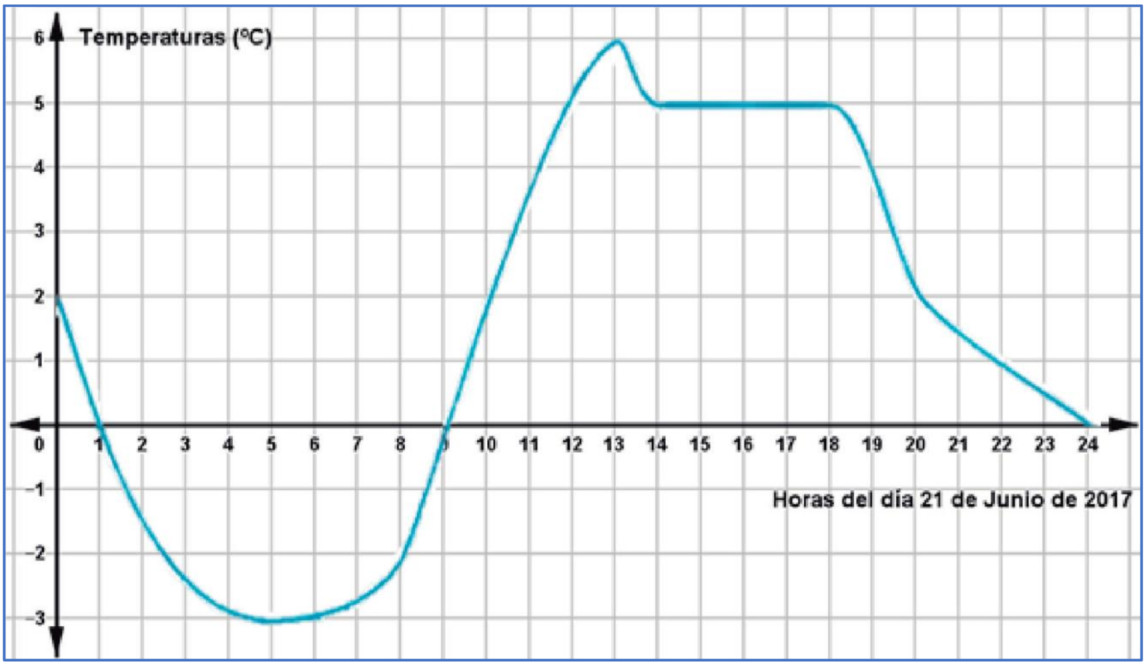
$(-\infty; a) \cup (b; c)$

Intervalo de decrecimiento:

$(a; b) \cup (c; +\infty)$

Ejemplo 2

En una estación meteorológica se registraron las temperaturas del 21 de junio de 2017 durante todo el día. La estación tiene un sensor que registra valores cada 1 segundo y, mediante un software, proporciona el siguiente gráfico:



a). ¿Qué variables se relacionan? ¿Cómo caracterizarían esa relación?

b). ¿Qué valores puede tomar *x*? ¿Y la variable dependiente *y*?

c). ¿Se registró en algún momento del día una temperatura de 0ºC? Si fue así, ¿cuándo?

d). Durante el día 21 de junio de 2017, ¿hubo temperaturas por debajo de los 0ºC? ¿Y por encima? De haber sido así, ¿entre qué horas del día sucedieron tales acontecimientos?

e). ¿Se registraron aumentos en la temperatura? ¿Y disminuciones? Si fue así, ¿entre qué horas del día sucedieron?

<u>Solución:</u>

a). En la situación, en la representación del gráfico, podemos observar que intervienen dos variables, es decir, dos magnitudes que pueden variar. Una de ellas representa las horas del día 21 de junio de 2017 (variable independiente t) y la otra, la temperatura (medida en ºC) en cada instante (variable dependiente T). Vemos, además, que a cada instante de tiempo le corresponde una única temperatura.

b). Cuando se trata de una situación en contexto real, estos conjuntos suelen presentar restricciones de acuerdo con las variables que estén involucradas.

La función que estamos estudiando representada es la variación de la temperatura *T* en función del tiempo *t* y lo podemos escribir: *T(t)*. Su dominio e imagen son:

Dom (*T*) = [0; 24]

Im (*T*) = [–3; 6]

c). Decir que la temperatura registrada fue de 0ºC es pensar para qué valores de *t* la función *T* toma el valor cero; es decir, en qué valores de *x* la curva que la representa interseca (corta) al eje de las abscisas.

Los valores del *Dom* *T*(*t*) que anulan la función son $t_1 = 1$ y $t_2 = 9$. Es decir que el día

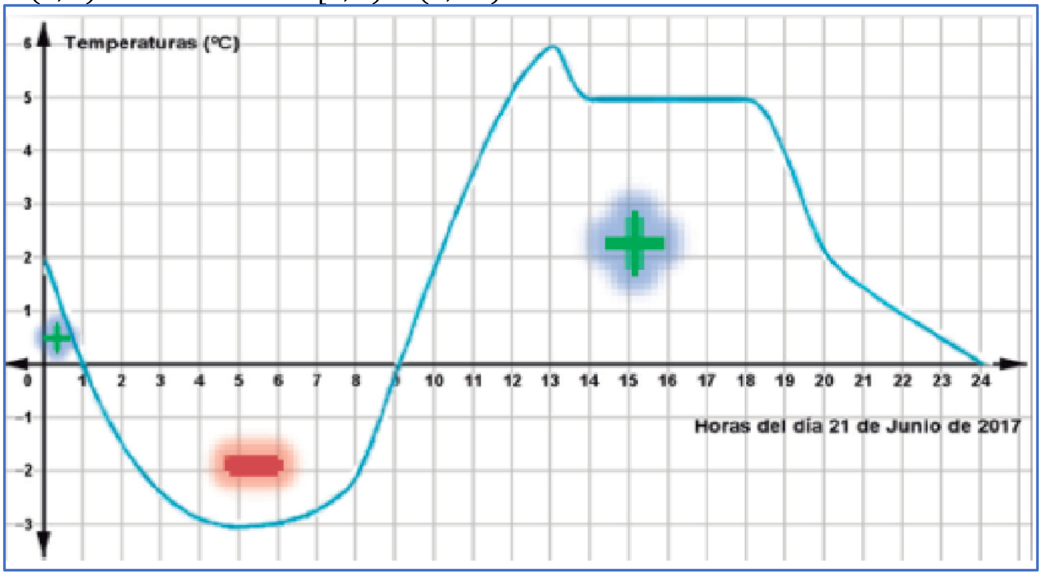
21 de junio de 2017 se registraron temperaturas de 0ºC en dos momentos, a la 1y a las 9 de la mañana.

La ordenada al origen de $T(t)$ es T = 2. A las 0 hs del día 21 de junio de 2017 se registró una temperatura de 2ºC.

Podemos escribir estos elementos como puntos porque representan intersecciones de la curva con los ejes coordenados: Raíces (1; 0) y (9; 0) Ordenada al origen (0; 2)

Y a su vez, podemos escribir el conjunto de los ceros: Cº = {0; 9}.

d). Entre la 1 hs y las 9 hs del día 21 de junio de 2017 se registraron temperaturas por debajo de los 0ºC. Y el resto del día se registraron temperaturas por encima de los 0ºC. En símbolos:
$C^- = (1;9)$ $C^+ = [0;1) \cup (9;24)$



e). Entre la 0 hs y la 5 hs del día 21 de junio de 2017 "bajó" la temperatura, luego "subió" desde las 5 hs hasta las 13 hs y bajó durante una hora más. A partir de las 14 hs y hasta las 18 hs se mantuvo aproximadamente la misma temperatura, momento en el que comenzó a bajar nuevamente hasta terminar el día.

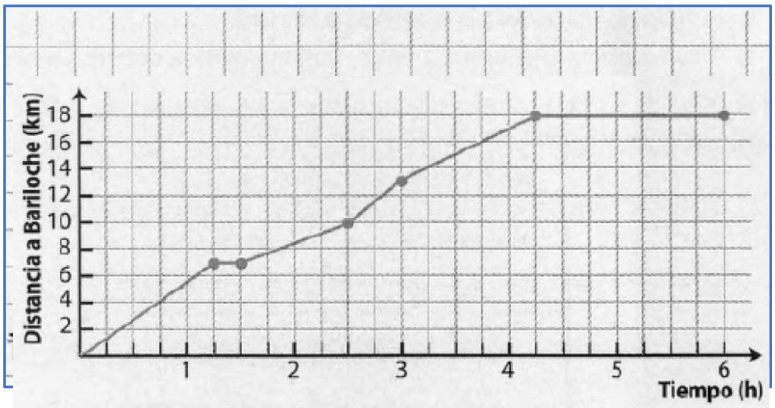
Los intervalos de crecimiento y decrecimiento para la función $T(t)$ son:

I↓ = (0;5) ∪ (13;14) ∪ (18;24) I↑ = (5;13)

Extraído de "Matemática: entre la secundaria y la universidad". Sanabria, Daniela [et al].

Actividad

5-. Dos excursionistas proyectan realizar una caminata desde San Carlos de Bariloche (Rio Negro) hasta un refugio en la montaña, que se encuentra a 18 km de la ciudad. Para orientarse, cuentan con un perfil del trayecto y un gráfico distancia-tiempo confeccionado por un grupo que realizó esa caminata el mes anterior. Si es posible, contestar las siguientes preguntas a partir de la información dada por dichas representaciones.



a). ¿A qué hora comenzó la caminata el grupo anterior?

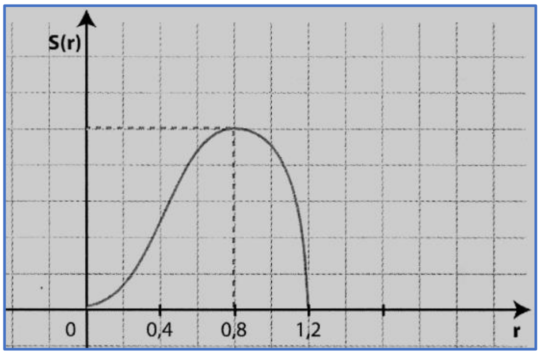
b).¿Cuántos kilómetros recorrieron aproximadamente hasta llegar al primer descanso? ¿A qué hora llegaron? ¿Cuánto tiempo se detuvieron?

c). ¿Cuántos kilómetros recorrieron desde ese lugar hasta alcanzar la primer cima y cuánto tiempo tardaron en subirla?

d). ¿Cuántos kilómetros hicieron de bajada? ¿Les llevó menos tiempo?

6-. Cuando una persona tose, la tráquea se contrae, su radio se chica y afecta la velocidad del aire que circula por ella.

El gráfico muestra la relación entre la velocidad S del aire y el radio r de la tráquea cuando se produce la tos, en el caso en que el radio de la tráquea sin contraer mide 1,2 centímetro.



a). Indicar el dominio y la imagen de la función.

b). ¿En que valor aproximado del radio de la tráquea al contraerse, la velocidad del aire alcanza un máximo absoluto?

c). ¿Qué porcentaje del radio de la tráquea sin contraer representa ese valor?

7-. Se necesita estimar el número de habitantes que tendrá una ciudad del interior del país a partir del año 2000, y se cuenta con la siguiente fórmula:

$$P(t) = 20 - \frac{6}{t+1}$$

Con t ≥ 0; t representa el número de años transcurren a partir del 2000 y P(t), el número de habitantes, expresado en miles.

a). Estimar el número de habitantes que tendrá la ciudad en el año 2000.

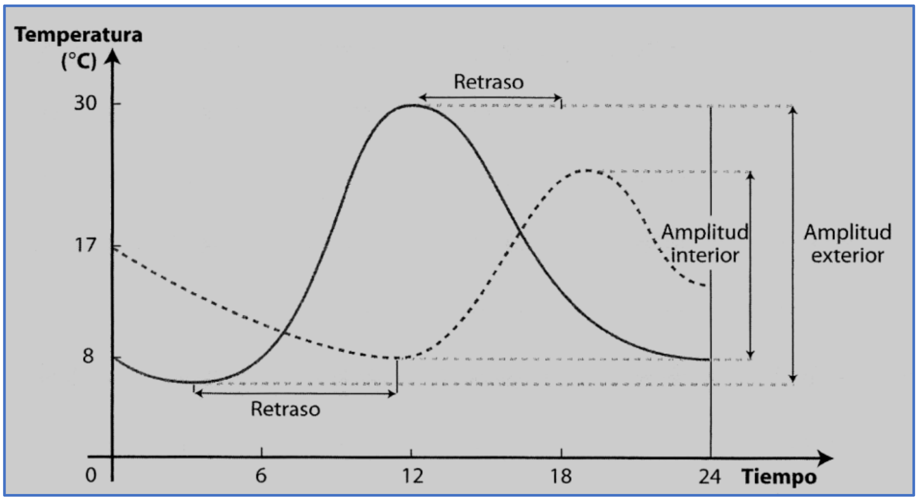
b). Estimar el número de habitantes para el 2001, 2002, …, etc., hasta llegar al año 2010.

c). ¿En qué año la población será de 19 000 habitantes? ¿Y de 19 500 habitantes?

d). Comprobar que, según las proyecciones de esta fórmula, la población nunca llegará a ser de 20 000 habitantes.

e

8-. El gráfico representa la temperatura medida en el interior y en el exterior de una casa, en un lapso entre las 0 y las 24 horas.



a). Hacer una tabla de valores indicando ambas temperaturas a las 0, 6, 12, 18 y 24 horas.

b). ¿A qué hora la temperatura interior es mínima y a qué hora es máxima? ¿Cuáles son los valores que toma en esos casos?

c). ¿A qué hora la temperatura exterior es mínima y a qué hora es máxima? ¿Cuáles son los valores que toma en esos casos?

d). Interpretar el significado que tienen en los gráficos los términos **retraso**, **amplitud interior** y **amplitud exterior**.

Extraido de "Matemática 1. Modelos matemáticos para interpretar la realidad". Camuyrano, M. B. Net, G. Aragón, M.

Situación 3

Una represa, cuya capacidad es de 1116 millones de litros de agua, tiene una filtración. Desde el primer día del mes pierde agua de manera uniforme, a razón de 18 millones de litros diarios, aproximadamente.

a). Se desea hallar la fórmula de la función que describe la cantidad de agua que permanece en la represa cada día. Representa gráficamente la función.

b). ¿En cuanto tiempo se podría vaciar la represa, en el caso de que no se solucione el problema de la pérdida de agua?

c). ¿En cuánto tiempo la represa tendría 70 millones de litros de agua?

Extraido de "Matemática 1. Modelos matemáticos para interpretar la realidad". Camuyrano, M. B. Net, G. Aragón, M.

Función Lineal

Llamamos ***<u>Función Lineal</u>*** o Polinómica de Primer Grado a aquellas funciones cuya expresión general es: ***f (x) = ax + b*** . Generalmente la escribimos ***y = ax + b***; donde **a** y **b** son números reales.

El dominio y la imagen de una *<u>función lineal</u>* es el conjunto de los números ***<u>Reales</u>***.

$$Dom\ f = R \qquad\qquad Im\ f = R$$

Los coeficientes principal e independiente de la función lineal reciben el nombre de **pendiente** y **ordenada al origen,** respectivamente.

$$y = ax + b$$

Pendiente

Ordenada al Origen

A esta forma de escribir a la función lineal se la llama ***ecuación explicita de la recta***.

La representación gráfica de este tipo de funciones es la **recta.**

La <u>ordenada al origen</u>, es el valor donde la recta corta al eje y. Lo podemos obtener haciendo x = 0; *f(0) = a.(0) + b = b* Entonces, el punto *(0, b)* es la ordenada el origen.

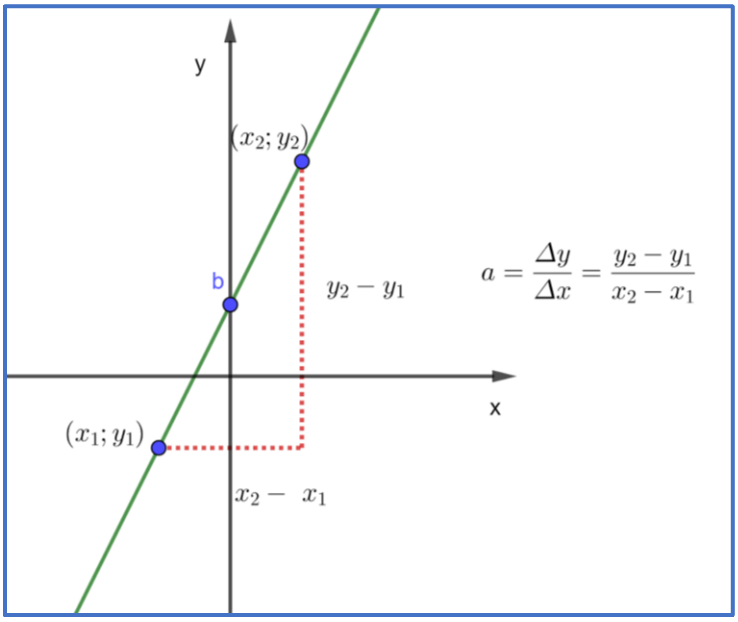
Se define la pendiente como la razón entre la variación sobre el eje *y* y la variación sobre el eje *x*. La pendiente nos indica la inclinación que tiene la recta.
En símbolos, siendo (x_1; y_1) y (x_2; y_2) dos puntos pertenecientes a la recta:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La ***raíz*** (x_0) es el valor donde la recta corta al eje x (y = 0)

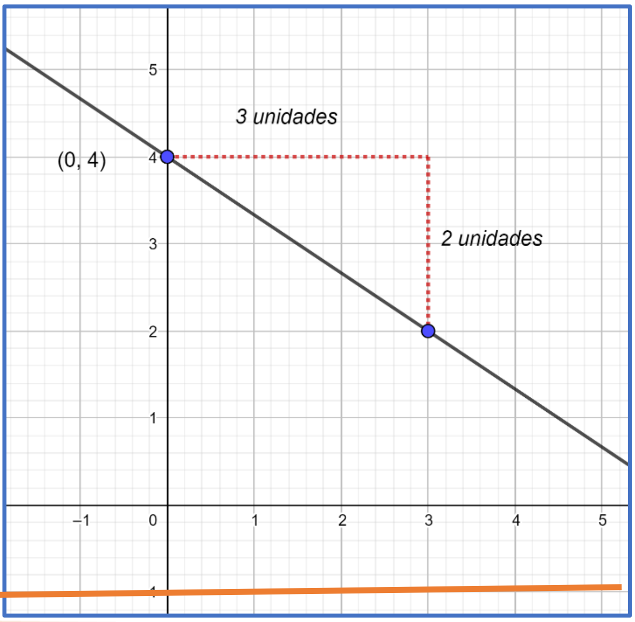
Para encontrar la ***raíz*** de una función lineal, igualamos a cero la ecuación y despejamos **x**.

$$y = 0 \ \rightarrow a.x + b = 0 \Longrightarrow x_0 = -\frac{b}{a}$$



Ejemplo 3

Si queremos graficar la recta $y = -\frac{2}{3}x + 4$primero identificamos en la ecuación la ordenada al origen (4) y la marcamos en la gráfica sobre el eje y.



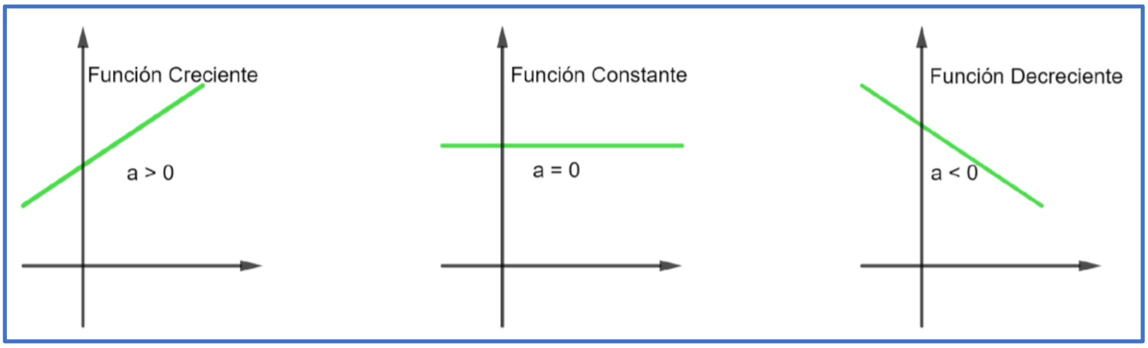
Solución: A partir de ella, marcamos un segundo punto de la recta “moviéndonos” según nos indica la pendiente (-2/3). Es decir, nos movemos 3 unidades hacia la derecha y bajamos 2 unidad (bajamos porque la pendiente es negativa).

Finalmente, trazamos la recta uniendo la ordenada al origen y el segundo punto.

Clasificación según el valor de la pendiente

Según el valor que tome la pendiente podemos clasificarla en:

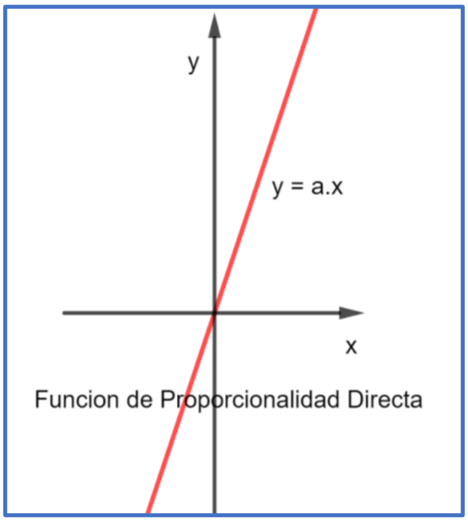
- Si ***a > 0***, la función es ***creciente***.
- Si ***a = 0***, la función se denomina ***constante***.
- Si ***a < 0***, la función es ***decreciente***.



Función de Proporcionalidad Directa

Cuando la ordenada al origen es nula (b = 0), la función será de la forma $f(x) = ax$ o $y = ax$. Y recibe el nombre de Función de Proporcionalidad Directa.

Los puntos de la gráfica de una función de proporcionalidad directa pertenecen a una recta que pasa por el origen de coordenadas.



Actividad

9-. Representa gráficamente cada recta a partir de la pendiente y la ordenada al origen. Clasifica según su inclinación.

$$y = 2x - 3$$

$$y = \frac{2}{3}x + 1$$

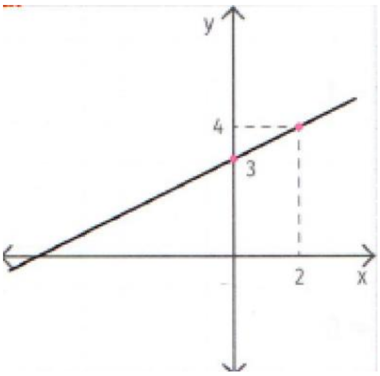
$$y = -\frac{5}{4}x - 2$$

$$y = \frac{1}{4}x$$

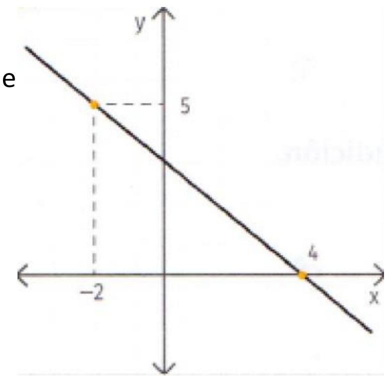
10-. Encuentra la ecuación explicita e indica la pendiente, la ordenada al origen y la raíz de cada recta.

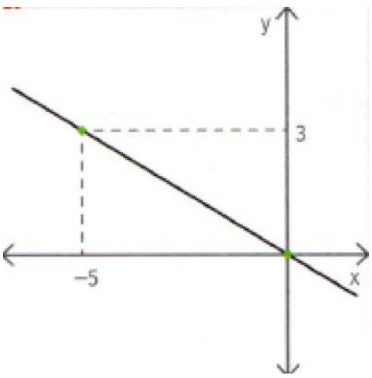
$$3x + y - 2 = 0 \qquad 2x - 5y = 3 \qquad \frac{x - 3y}{4} = 1$$

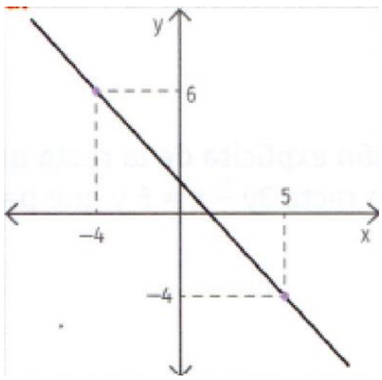
11-. Hallar la ecuación de la recta a partir de la gráfica.



e







Ejemplo 4

Hallar la ecuación de la recta con pendiente a = 3 y que pasa por el punto (−2; 5).

Solución: Como sabemos que es una recta, y que su pendiente es 3; la ecuación será de la forma $y = 3x + b$

Debemos determinar el valor de la ordenada al origen (b) que no conocemos, pero sabemos que pasa por el punto (-2; 5), lo que quiere decir que cuando x vale (-2); y vale 5. Reemplazando estos valores en la ecuación nos queda: $5 = 3.(-2) + b$

$b = 11$. Entonces podemos escribir la ecuación explicita de la recta: $y = 3x + 11$

Ejemplo 5

Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos P = (2; 3) y Q = (−1;−3).

Solución: Si conozco dos puntos que pertenecen a la recta, puedo determinar la pendiente de la misma:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - 3}{-1 - 2} = \frac{-6}{-3} = 2$$

Entonces la recta tendrá por ecuación: $y = 2x + b$

Sabemos que pasa por los puntos (2, 3) y por (−1;−3). Utilizando uno de ellos podemos encontrar el valor de b.

$3 = 2.2 + b \quad \rightarrow b = \ -1.$

Entonces la ecuación será: $y = 2x - 1$

Actividad

12-. Hallar la ecuación de la recta que satisface las condiciones dadas:

a). Tiene pendiente −3 y ordenada al origen 4.

b) Su pendiente es 5 y su raíz es x = −1.

c). Tiene pendiente −2 y pasa por el punto (1; 5).

d). Su ordenada al origen es −3 y pasa por el punto (2; −4).

13-. Hallar en cada caso la ecuación de la recta que tiene la pendiente indicada y pasa por el punto dado:
a). m = 2; P = (−3; 1).
b). m = −1/3 ; P = (4; 2).
c). m = 5; P = (3;−3).

14-. Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos:
a). P = (−2;−4); Q = (1; 5).

b). P = (1; 2); Q = (0; 4).

c). P = (2; 4); Q = (−4; 1).

15-. El dueño de una agencia de viajes paga a cada empleado un sueldo base de $6300 por mes, más $500 por cada viaje vendido.

a). Determinar el sueldo mensual de cada empleado, en función de los viajes vendidos.

b). Determinar el sueldo de un empleado que vende 12 viajes en un mes.

c). Determinar la cantidad de viajes que debe vender en un mes para que el sueldo sea de $14800.

16-. Una pileta se vacía con una bomba que extrae agua a razón de 400 litros por minuto. Al encender la bomba, en la pileta había 30000 litros de agua.
a). Hallar la función que indica el caudal restante de agua en función del tiempo, y representarla gráficamente.
b). Determinar la cantidad de agua que queda en la pileta luego de media hora de comenzar a vaciarla.
c). Determinar el tiempo necesario para vaciar la pileta por completo.

17-. En Argentina se utiliza generalmente la escala de grados Celsius (ºC) para medir la temperatura.
Sin embargo, en otros países se utiliza la escala de grados Fahrenheit (ºF). La relación de conversión entre ambas escalas está dada por la fórmula

$$f(x) = \frac{9}{5}x + 32$$

siendo x la temperatura en grados Celsius, y f(x) es la misma temperatura expresada en grados Fahrenheit.
a). Graficar la recta correspondiente a los grados Fahrenheit en función de los grados Celsius.
b). ¿Cuántos grados Fahrenheit son 20 ºC?
c). ¿Cuántos grados Celsius son 50 ºF?
d). ¿Para qué valores de temperatura, expresada en grados Celsius, la temperatura equivalente en grados Fahrenheit es negativa?

Extraído de “Manual de matemática preuniversitaria”. Carena, Marilina.

Rectas Paralelas Y Perpendiculares

Dos rectas son paralelas si tienen la misma inclinación. Puesto que, la inclinación está dada por la pendiente, tenemos que:

• Dos o más rectas son **paralelas** (II) si y sólo si sus pendientes son iguales.

$$R_1: y = ax + b \; R_2: y = cx + b \,\} \; R_1 \parallel R_2 \Leftrightarrow c = a$$

Dos rectas son perpendiculares si forman entre ellas un ´ángulo recto. Para el caso de dos rectas con pendientes no nulas, puede probarse que el producto de sus pendientes es igual a −1 o uno es el inverso multiplicativo del otro, y con signo opuesto.

• Dos rectas son **perpendiculares** (⊥) si y sólo si sus pendientes son inversas y opuestas.

$$R_1 : y = ax + b \; R_2 : y = cx + b \,\} R_1 \perp R_2 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{a} \; o \; a.c = -1$$

Ejemplo 6

Hallar una recta paralela a la gráfica de la función f(x) = 3x + 5, cuya ordenada al origen sea −4.

Solución: Una recta queda determinada conociendo su pendiente a y su ordenada al origen b. Estos dos datos fueron dados en la consigna, ya que pedir que sea paralela a la mencionada, implica que deben tener la misma pendiente
a = 3.
Además, se pide que b = −4, por lo que la ecuación de la recta buscada es y = 3x − 4

Extraído de "Manual de matemática preuniversitaria". Carena, Marilina.

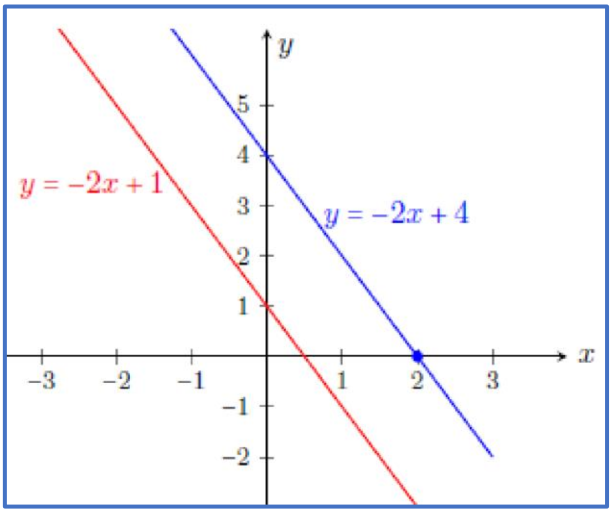
Ejemplo 7

Hallar la ecuación de la recta paralela a la gráfica de f(x) = −2x + 1, cuya raíz sea x = 2.

Solución: Ya sabemos que la pendiente de la recta buscada es −2, es decir, la ecuación es y = −2x + b. Determinaremos b de manera que la raíz de la función sea x = 2, es decir, que debe cumplirse que el punto (2; 0) pertenezca a la recta.

Esto ocurre si 0 = −2 . 2 + b lo que implica b = 4. Entonces, la ecuación de la recta buscada es y = −2x + 4.

Graficamos esta recta junto con la dada en la figura siguiente



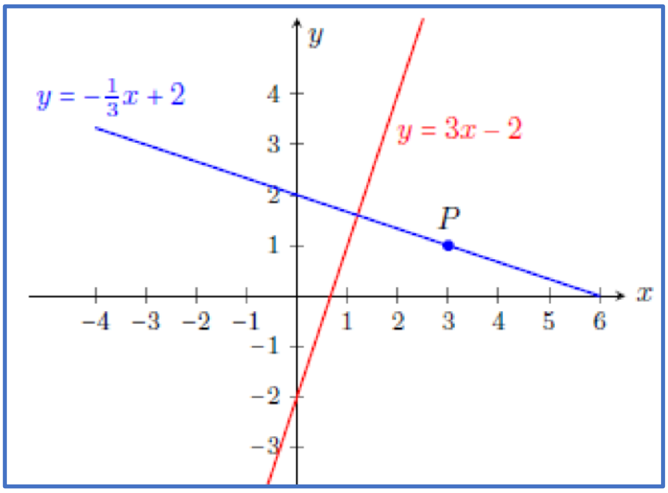
Extraído de "Manual de matemática preuniversitaria". Carena, Marilina.

Ejemplo 8

Hallar la ecuación de la recta perpendicular a y = 3x − 2, que pasa por el punto P = (3; 1).

Solución: Al pedir que sea perpendicular a una recta con pendiente 3, nos está diciendo que la recta buscada debe tener pendiente a = −1/3.

Es decir, será y = −1/3.x + b; y determinaremos b de manera que (3; 1) pertenezca a la recta. Para ello, debe valer la igualdad 1 = −1/3. 3 + b; de donde se obtiene b = 2. Entonces, la recta buscada es y = −1/3x + 2, cuya representación gráfica se encuentra en la figura siguiente:



Extraído de "Manual de matemática preuniversitaria". Carena, Marilina.

Ejemplo 9

Hallar la ecuación explicita de la recta que pasa por el punto (2, 5/2) y es perpendicular a la recta determinada por los puntos (-2, 2) y (4, -1). Representa gráficamente.

Solución: Para comenzar, encontramos la ecuación de la recta que pasa por los puntos (-2, 2) y (4, -1).

Primero encontramos la pendiente: $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1-2}{4-(-2)} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$

Ahora la ordenada al origen: $y = -\frac{1}{2}x + b$; si pasa por el punto (4, -1) entonces.

$-1 = -\frac{1}{2}.4 + b$ $\quad -1 = -2 + b$ $\quad b = 1$

La ecuación de la recta será: $y = -\frac{1}{2}x + 1$

Como la recta que pasa por el punto (2, 5/2) tiene que ser perpendicular a la anterior, su pendiente será un numero que multiplicado por (-1/2) de 1.

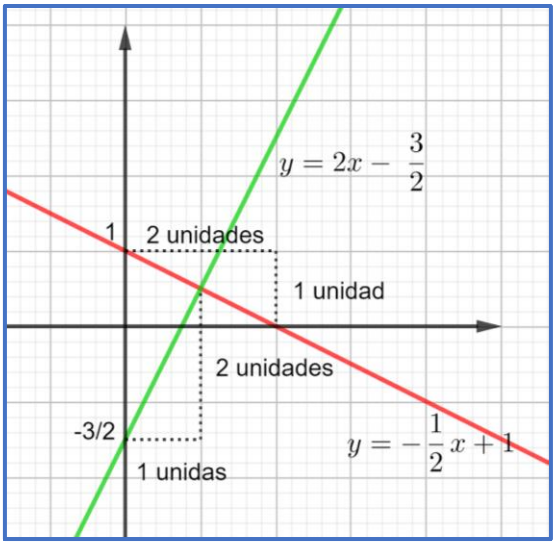
$$-\frac{1}{2}.c = -1 \qquad\qquad c = 2$$

Entonces $y = 2x + d$; como pasa por (2, 5/2).

$$\frac{5}{2} = 2.2 + d \qquad \frac{5}{2} = 4 + d \qquad -\frac{3}{2} = d$$

Entonces la ecuación de la recta buscada es:

$$y = 2x - \frac{3}{2}$$



Actividad

18-. Demostrar que las rectas con ecuaciones ***−2y + 8x = 6*** y ***3y − 12x − 15 = 0*** son paralelas.

19-. Hallar la ecuación de la recta que satisface las condiciones en cada inciso:

a). Su ordenada al origen es -2 y es paralela a y = −4x + 1.

b). Pasa por el punto (1; 8) y es paralela a y = 3x + 3.

e

c). Es paralela a y = −2/3x + 1 y su raíz x = 6.

d). Es perpendicular a y = −5/4x y pasa por el origen.

e). Pasa por el punto (1; 1) y es perpendicular a y = 1/3x + 8.

f). Su raíz es x = −2 y es perpendicular a y = −2x + 7.

20-. Hallar la ecuación de la recta con ordenada al origen −3, que sea perpendicular a la que pasa por los puntos P = (2; 6) y Q = (−2; 3).

21-. Hallar la ecuación de la recta paralela a la que une los puntos $(1;-4)$ y $(-1; 6)$, que pase por el punto $(1;-2)$.

Extraído de "Manual de matemática preuniversitaria". Carena, Marilina.

Situación 4

Una empresa tiene un ingreso mensual de $30 por unidad vendida de cierto producto. Por otra parte, el costo fijo mensual es de $4800 y el costo variable de $22 por unidad. Se desea averiguar cuantas unidades es necesario vender por mes para que el ingreso sea igual al costo y cuál es ese valor.

Extraido de "Matemática 1. Modelos matemáticos para interpretar la realidad". Camuyrano, M. B. Net, G. Aragón, M.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Cuando se consideran varias ecuaciones simultáneamente, se dice que forman un sistema. Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones con las mismas incógnitas. Resolver un sistema significa hallar todas las soluciones del sistema, es decir, todos los valores posibles para las incógnitas que hacen verdadera cada una de las ecuaciones.

En particular, veremos métodos para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, el cual es uno de la forma $\{ax + by = c \ dx + ey = f$; con *a, b, c, d, e* y *f* números reales y las incógnitas *x* e *y*.

La llave se usa para enfatizar que se quiere que ambas ecuaciones se cumplan a la vez, es decir, una solución al sistema son valores para x e y que hacen válidas a ambas igualdades simultáneamente.

Existen varios métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

MÉTODO GRÁFICO

Para resolver gráficamente un sistema de ecuaciones, debemos representar ambas rectas en un mismo sistema de ejes cartesianos y hallar, si existe, la intersección de ambas. Este método nos permite observar una solución aproximada, este método es el menos preciso de todos.

MÉTODOS ANALÍTICOS

La resolución analítica de este tipo de sistemas es bastante sencilla, pues consiste esencialmente en transformar el sistema en una ecuación lineal de una sola incógnita, resolverla y hallar con la solución obtenida el valor de la incógnita restante. Para ello, veremos dos métodos que describiremos a continuación.

Método de Sustitución:

despejamos una de las variables en una de las ecuaciones, y luego reemplazamos esta expresión en la otra ecuación para obtener, si existe, el valor de una de las incógnitas, es decir, una de las coordenadas del punto de intersección. Finalmente, reemplazamos el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones iniciales para obtener el valor de la otra coordenada del punto.

Ejemplo 10

En una heladería que vende helados en tacitas de $3 y en cucuruchos de $4, tienen que enviar un pedido a domicilio. El empleado que tomó el pedido no anotó el número de tacitas y el de cucuruchos, pero si que el valor de la compra era $84. ¿Cuántas tacitas y cuantos cucuruchos habrá comprado si sabemos que eran 23 helados?

Solución: Si se sabe que compraron 23 helados entre tacitas y cucuruchos, llamando T a la cantidad de tacitas y C a la cantidad de cucuruchos, podemos plantear la ecuación lineal: T + C = 23

Además, sabemos que cada tacita cuesta $3 y que cada cucurucho $4 y que la compra es de $84. Podemos armas que: 3T + 4C = 84

$$\{T + C = 23 \; 3T + 4C = 84$$

Como los coeficientes de la primera ecuación son uno, podemos despejar una de la variable de esta y sustituirla en la otra ecuación.

T = 23 – C

3.(23 – C) + 4C = 84 ⟶ 69 – 3C + 4C = 84 ⟶ C = 15

T = 23 – 15 = 8 ⟶ T = 8

Se compraron 8 tacitas y 15 cucuruchos.

Extraído de "Matemática4ES. Huellas". Chorny, F. Salpeter, C. Casares, P.

Método de igualación:

Este método consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones, y después igualar (como lo indica el nombre) las dos expresiones obtenidas. De esta forma se obtiene una ecuación con una sola incógnita, la cual podemos resolver para luego obtener el valor de la otra.

Ejemplo 11

Una persona realizó un viaje en dos días. El segundo día recorrió cuatro veces más kilómetros que los que recorrió el primer día. ¿Cuántos kilómetros recorrió cada día si en el segundo día hizo 80 km más que en el primero?

Solución: Podemos llamar x a la cantidad de kilómetros recorrida durante el primer día y llamar y a la cantidad de kilómetros recorrida durante el segundo día.

Como el segundo día recorrió cuatro veces más kilómetros que el primer día, podemos plantear la ecuación y = 4x.

Por otra parte, como en el segundo día hizo 80 km más que en el primero, podemos plantear la ecuación y = x + 80.

Ambas ecuaciones forman el sistema $\{y = 4x \; y = x + 80$

Dado que en estas ecuaciones tenemos despejada la variable y, como representan lo mismo en ambas ecuaciones, podemos igualarlas.

4x = x + 80 ⟶ 3x = 80 ⟶ x = 26,66

Reemplazando este valor en una de las ecuaciones. Y = 4. 26,66 = 106,66

El primer día recorrió 26,6 km y el segundo día 106,66 kilómetros.

Extraído de “Matemática4ES. Huellas”. Chorny, F. Salpeter, C. Casares, P.

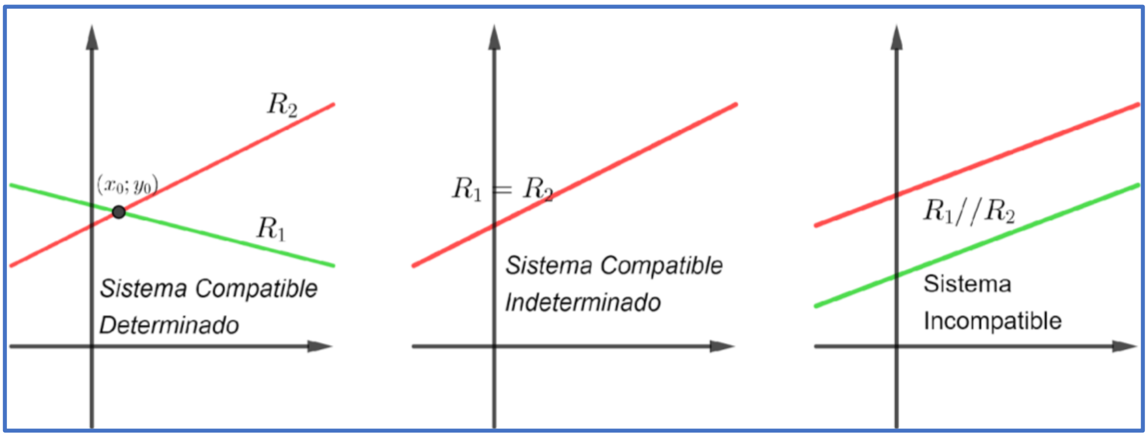
Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales

Los sistemas de ecuaciones lineales geométricamente representan rectas. Puede ocurrir tres situaciones posibles.

Que las rectas se corten en un solo punto (x_0; y_0), lo que indica que el sistema tiene una única solución. Se denomina ***Sistema Compatible Determinado***.

Que las rectas coincidan, tienen infinitos puntos en común, por lo tanto, el sistema tiene infinita solución. Se denomina ***Sistema Compatible Indeterminado***.

Que las rectas no se corten, no existe ningún punto de intersección; las rectas son paralelas, indica que no tiene solución. Se denomina ***Sistema Incompatible***.



Actividad

22-. Hallar el conjunto solución de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

e

$\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 5x - 2y = -16 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -2x + 3 \\ 3y = 5 - 6x \end{cases}$ $\begin{cases} 2y + x = 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases}$

Realizar una gráfica de cada uno mostrando que la solución hallada coincide y clasificarlos.

Extraído de "Matemática: entre la secundaria y la universidad" Sanabria, Daniela [et al].

Ejemplo 12

Las edades de Camila y de su mamá suman 54 años, y dentro de 9 años la edad de la mamá será el doble de la edad de Camila. ¿Cuántos años tiene cada una ahora?

Solución: Llamemos x a la edad de Camila ahora, e y a la edad actual de su mamá. Entonces, las respectivas edades dentro de 9 años serán x+9 e y +9. Los datos del problema nos dicen que

$$\begin{cases} x + y = 54 \\ 2.(x + 9) = y + 9 \end{cases}$$

Resolveremos este sistema por sustitución, despejando x de la primera ecuación:
x = 54 − y
y reemplazando en la segunda:
2(54 − y + 9) = y + 9 _ 2(63 − y) = y + 9
126 − 2y = y + 9
117 = 3y
39 = y
Esto significa que, luego de verificar, la edad de la mamá de Camila es 39 años,
y de *x = 54 − y* tenemos que la edad de Camila es *x = 54 − 39 = 15* años.

Extraído de "Manual de matemática preuniversitaria". Carena, Marilina.

Actividad

23-. Los lados de un triángulo se encuentran sobre las rectas de ecuaciones.

$y = \frac{1}{2}x$ $y \overset{e}{=} -x$ $y = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}$

Hallar los vértices del triángulo y representarlo gráficamente.

24-. Encontrar los vértices del cuadrilátero formado por las rectas 3x + 2y = -7; -2x + 3y = -4; -3x -2y = -6; 2x – 3y = -9.

25-. Del ejercicio anterior, encontrar las ecuaciones de las diagonales e indicar si son perpendiculares. ¿En qué punto se intersecan?

26-. Dos tanques de diferentes colores uno verde y el otro rojo, que contienen una cierta cantidad de agua, y se están llenando por medio de manqueras de distintas dimensiones.

El tanque verde contiene 400 litros y el caudal de agua que recibe de la manguera es de 20 l/s; mientras que el tanque rojo contiene 200 litros y recibe 90 litros por segundo.

Hallar, si existe, el momento en el cual ambos tanques contienen la misma cantidad e agua. ¿Cuál es el valor de esa cantidad de litros?

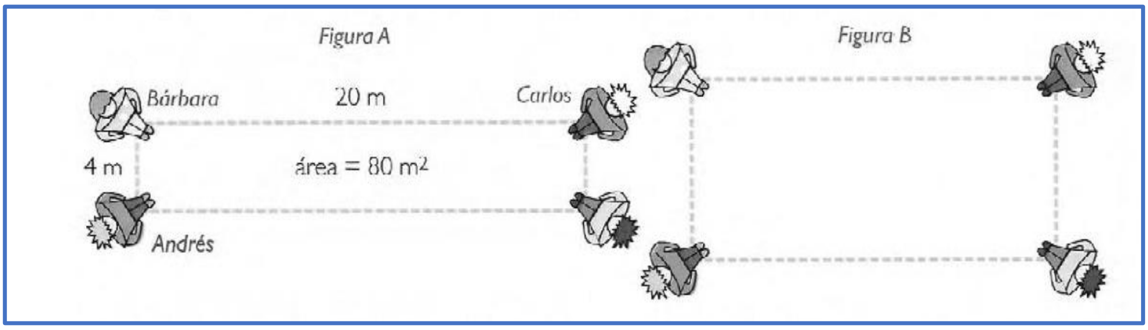
27-. Una agropecuaria quiere preparar 10kg de un alimento balanceado, para venderlo a $ 129. Para la preparación utiliza el alimento A que cuesta $150 y el alimento B que cuesta $80 el kilogramo. ¿Cuántos kilogramos de cada clase debe colocar?

28-. Juan es colombiano y decide poner un negocio de venta de café en grano. Para que su negocio sea diferente a los demás, quiere preparar un café especial para sus clientes. Para ello va a mezclar dos tipos de café. Un café común que cuesta $70 el kilogramo y una café selección de $120 el kilogramo. Va a preparar cajas de 1kg que venderá a $100 y que tendrán el doble de café común que de café selección.

¿Cuántos kilogramos de cada café deberá poner Juan en cada caja?

Situación 5

En el patio de la escuela se desarrolla una jornada recreativa para alumnos de distintos cursos. En uno de los juegos, participan equipos de 4 chicos. Se le entregó a cada equipo una soga de 48 m de longitud cuyos extremos están unidos. El desafío consiste en cerrar, con la soga, un sector rectangular, tratando de abarcar la mayor superficie posible, ya que resulta ganador el equipo que logre el rectángulo de área mayor.



Para probar distintas posibilidades, los cuatro integrantes de cada equipo se paran, sosteniendo la soga desde los vértices del rectángulo, como se muestra en la ilustración.

En la primera disposición (Figura A), Andrés y Barbara están a 4 m de distancia, mientras que en la segunda (Figura B) se han situado uno a 8 m del otro.

¿Cómo deben ubicarse para encerrar la mayor superficie? ¿Habrá una fórmula que sirva para calcular el área del rectángulo en función de la distancia entre Andrés y Barbara?

Y si la hubiera… ¿serviría para averiguar cual es la mayor área que puede encerrarse con la soga?

Funcion Cuadrática

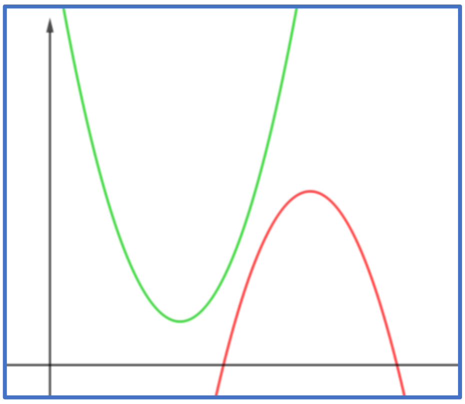
Las funciones cuadráticas permiten construir modelos de situaciones referidas a distintas áreas como la Física, la Biología, la Economía, la Astronomía, la Comunicación y la Geometría entre otras áreas. En la antigüedad, los griegos, desde antes de Euclides (330-275 a.C.), resolvían ecuaciones cuadráticas basándose en un método geométrico donde hacían intervenir cuadrados y rectángulos. En el siglo XVII, luego de que Johannes Kepler (1571-1630) expusiera las leyes que rigen los movimientos de los planetas, los astrónomos descubrieron que las órbitas de los planetas y cometas respondían a modelos cuadráticos.

La función ***f(x) = ax² + bx + c***, con a, b, c números reales y $a \neq 0$, es una **función cuadrática** expresada en su forma polinómica.

$$y = ax^2 + bx + c$$

Coeficiente principal o Cuadrático — Coeficiente lineal — Término independiente

Por ser una función polinómica, su dominio es el conjunto R de los números reales y su representación gráfica es una curva llamada ***parábola***.



La gráfica puede ser de dos formas, cóncava hacia abajo o cóncava hacia arriba. Esto va a depender del valor del coeficiente principal ***a***.

- Si ***a*** es <u>positivo</u>, la parábola es cóncava hacia ***arriba*** y posee un punto ***mínimo***.
- Si ***a*** es <u>negativo</u>, la parábola es cóncava hacia ***abajo*** y posee un punto ***máximo***.

El punto máximo o mínimo de la parábola recibe en nombre de ***vértice***.

Las parábolas son ***simétricas*** con respecto a una recta paralela al eje de las ordenadas, que pasa por el punto mínimo o máximo. Esta recta recibe el nombre de **eje de simetría**.

Algunas características de la representación función cuadrática

• Es una curva con dos ramas, una creciente y otra decreciente presentando un valor **máximo o mínimo** en un punto que denominamos **vértice**.

• Está compuesta por **puntos simétricos** (salvo el vértice). Éstos son los puntos del dominio de la función que tienen la misma imagen.

• El **eje de simetría** es una recta vertical que corta la parábola en el vértice, dividiéndola en dos partes congruentes y simétricas.

Representación gráfica

Para poder graficar una parábola basta con conocer algunos ELEMENTOS importantes en ella:
Raíces: Son los puntos donde la parábola corta al eje x. Los podemos calcular igualando a cero la función y aplicando la fórmula:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Vértice: la coordenada x la podemos determinar de dos formas, encontrando el punto medio entre las raíces, sumándolas y dividiéndolas por dos o aplicando la fórmula:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b}{2a}$$

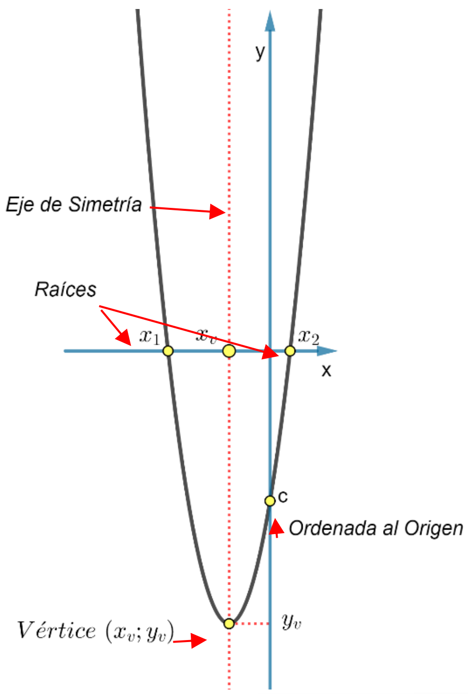
La coordenada y la determinamos el valor numérico de x_v.

$$y_v = a(x_v)^2 + b(x_v) + c$$

Eje de simetría: Coincide con x_v. Su ecuación será $x = x_v$

Ordenada el rigen: Es el punto donde la grafica corta al eje y. Lo podeos determinar haciendo x = 0

$y = a(0)^2 + b.(0) + c$ entonces $y = c$



Ejemplo 13

Representa gráficamente la función *y = x² – 6x + 5*

Solución: Para poder representar gráficamente la función cuadrática debemos encontrar ciertos elementos que nos ayudarán a construir su gráfica.

Raíces:

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4.1.5}}{2.1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2}$$

$$x = \frac{6 \pm 4}{2} = \{x_1 = 1\; x_2 = 5$$

Vértice:

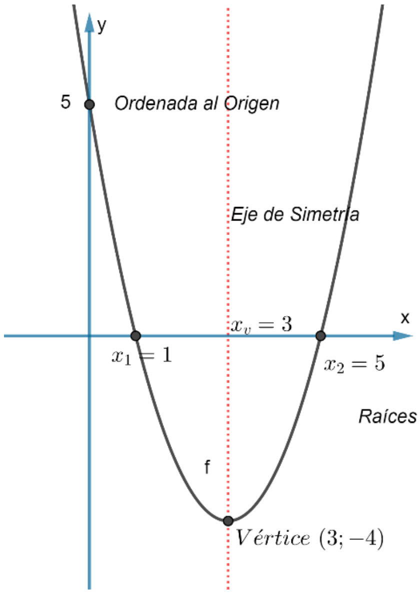
$1 + 5$

x Sumando las raíces

x_v Aplicando la fórmula

2.1

$$y_v = (3)^2 - 6.(3) + 5 = -4$$



Eje de Simetría: x = 3

Ordenada al origen: y = 5

Actividad

29-. Representa gráficamente las siguientes funciones. Identifica primeramente los valores de los coeficientes y marca en la gráfica los elementos.

$$y_1 = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{5}{2} \qquad y_3 = 2x^2 12x + 14 \qquad y_5 = -x^2 - 6x + 1$$

$$y_2 = -x^2 + 4x - 3 \qquad y_4 = -3x^2 - 12x - 8 \qquad y_6 = x^2 - x - 2$$

Formas de escribir una función cuadrática

Según como se escriba la función, la llamamos de diferente forma y nos indica elementos diferentes.

Si la función se escribe ***y = ax² + bx + c***, se dice que es la *ecuación polinómica* de la función cuadrática. De ella obtengo el valor de los coeficientes, puedo saber la concavidad y la ordenada al origen.

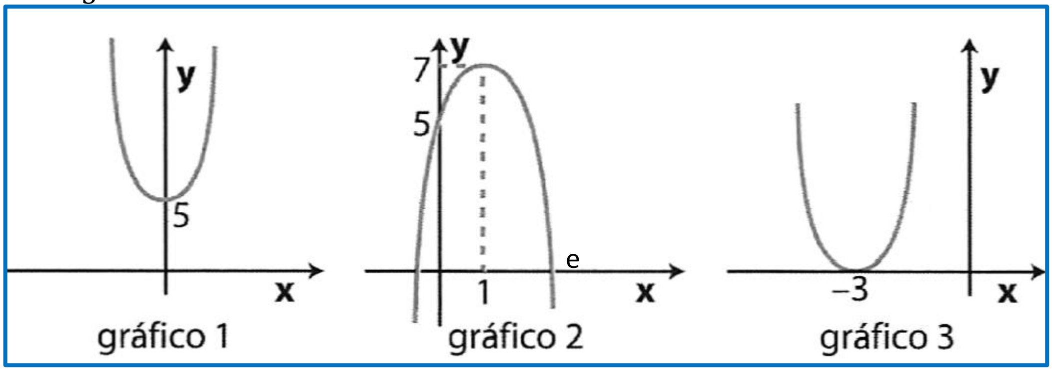
Si la función se escribe ***y = a.(x - x$_v$)² + y$_v$***, se dice que es la *ecuación canónica* de la función cuadrática. De ella podemos saber la concavidad y las coordenadas del vértice. Para poder llevarla a la forma *polinómica,* desarrollamos el cuadrado de un binomio y operamos según las propiedades correspondientes.

Si la función se escribe ***y = a.(x – x₁).(x – x₂)***, se dice que es la *ecuación factorizada* de la función cuadrática. De ella podemos saber la concavidad y los valores de las raíces. Para poder escribirla en forma *polinómica*, debemos aplicar propiedad distributiva con cuidado.

Actividad

30-. Relacionar cada una de las siguientes ecuaciones de parábolas con su gráfico correspondiente.

$y = \frac{4}{5}(x+3)^2$ $\qquad y = x^2 + 5$ $\qquad y = -2(x-1)^2 + 7$



31-. Dadas las siguientes funciones:

$$y = -x^2 + x - \frac{1}{4}$$

$$y = 3x^2 + 12x + 17$$

$$y = -\frac{2}{3}.(x-1)(x+1)$$

$$y = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 2$$

Hallar el dominio, el vértice, el conjunto imagen, la ordenada de origen y los ceros.

Representar gráficamente cada una de ellas.

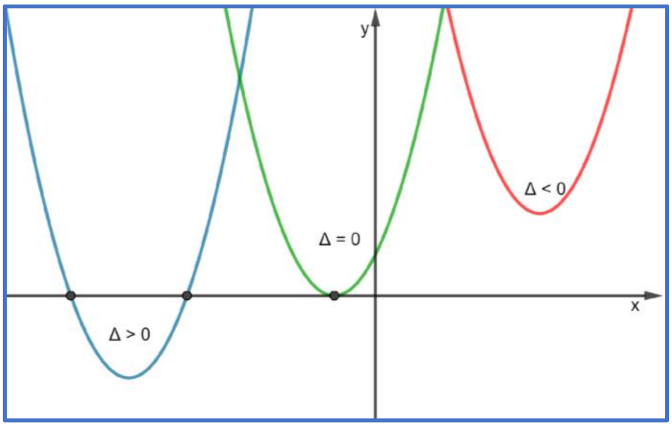
Definir los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Definir los conjuntos de positividad y negatividad.

Extraido de "Matemática 1. Modelos matemáticos para interpretar la realidad". Camuyrano, M. B. Net, G. Aragón, M.

Estudio del Discriminante

En muchas oportunidades observamos que la parábola corta o no al eje x, y en algunas lo hace en más de un punto. Este comportamiento se debe al valor del radicando.



Si observamos la fórmula que permite calcular las raíces de una función cuadrática resolviendo la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Al radicando ***$b^2 - 4\,ac$*** se llama discriminante (**Δ**) y puede presentarse diferentes posibilidades:

- Si $\Delta = b^2 - 4\,ac > 0$; entonces la ecuación tiene dos raíces reales distintas, la función corta al eje x en dos puntos.
- Si $\Delta = b^2 - 4\,ac = 0$; entonces la ecuación tiene dos raíces reales iguales, la función corta al eje x en un punto.
- Si $\Delta = b^2 - 4\,ac < 0$; entonces la ecuación tiene dos raíces complejas distintas, la función no corta al eje x.

Actividad

32-. Averigüen si las funciones cuadráticas $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$ y $g(x) = -\frac{1}{3}x^2 - 2x - 4$ tienen raíces reales. Verifíquenlo gráficamente

33-. Una de las raíces de la función $g(x) = k\,(x+5)^2 - 6$ es 2.

a). ¿Cuál es el valor de k?

b). ¿Cuál es le valor de l otra raíz de g?

34-. Construyan el gráfico de una parábola cuyo eje de simetría sea la recta x = -5, su vértice es el punto (-5, -8) y además, contenga al punto (-2, -5). ¿Cuál es la fórmula de la función cuadrática asociada a esta parábola?

Ejemplo 14

En el agua, las condiciones térmicas para llevar a cabo una vida óptima dependen de cada especie de pez. Para algunas especies, las temperaturas muy altas o muy bajas pueden conducir a una mortalidad elevada. Supongamos que la población de peces en una determinada parte del océano (en miles de peces) en función de la temperatura x del agua (en grados Celsius) está modelada por:

p(x) = −2x² + 40x − 72

(a) Representar gráficamente esta función.

(b) Determinar la temperatura que maximiza la población de peces. ¿Cuál es esta cantidad máxima?

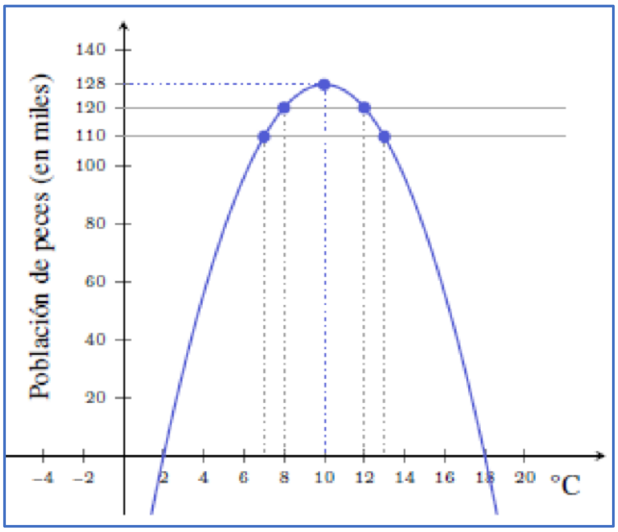
(c) Hallar el intervalo de temperaturas para el cual la población es de al menos 120 000 peces.

(d) ¿Cuántos peces hay cuando la temperatura es de 7 grados Celsius? ¿Para qué otra temperatura se tiene la misma población?

(e) Indicar el intervalo de temperatura en el que hay población de peces.

<u>*Solución:*</u>

(a). Si en el eje x representamos la temperatura del agua en ºC, y en el eje y la población (en miles de peces) en función de dicha temperatura, obtenemos la gráfica:



(b). Como la gráfica es cóncava hacia abajo, dado que el coeficiente principal es negativo, posee un punto máximo. Obtenemos el vértice.

$$x_v = \frac{-40}{2.(-2)} = 10 \qquad\qquad p(10) = -2.(10)^2 + 40.(10) - 72 = 128$$

La población de peces será máxima cuando la temperatura del agua sea de 10º, y será de 128 000 peces.

(c) Debemos resolver la inecuación p(x) < 120:

$-2x^2 + 40x - 72 < 120 \iff -2x^2 + 40x - 192 < 0$

Aplicando la resolvente para factorizar el polinomio que aparece en la última desigualdad, obtenemos:

$-2(x - 8)(x - 12) < 0$

Haremos una tabla de signos para resolver esta inecuación, que es equivalente a la pregunta planteada:

Intervalo / Factor	$(-\infty, 8)$	$(8, 12)$	$(12, \infty)$
$x - 8$	$-$	$+$	$+$
$x - 12$	$-$	$-$	$+$
-2	$-$	$-$	$-$
$-2(x-8)(x-12)$	$-$	$+$	$-$

Esto significa que la población es de al menos 120 000 peces cuanto la temperatura pertenece al intervalo [8; 12]. Se agrego la recta y = 120 en el gráfico para comprobar este resultado.

(d). La cantidad de peces (en miles) cuando la temperatura del agua es igual a 7 grados Celsius es $p(7) = -2.(7)^2 + 40.(7) - 72 = 110$

Para determinar para qué otra temperatura la población es de 110 000 peces, debemos resolver p(x) = 110

$p(x) = 110 \Leftrightarrow -2x^2 + 40x - 72 = 110 \Leftrightarrow -2x^2 + 40x - 182 = 0$:

Aplicando la resolvente obtenemos $x_1 = 7$ y $x_2 = 13$. Luego, cuando la temperatura es de 13 grados Celsius, la población también es de 110 000 peces.

Agregamos también al gráfico la recta y = 110, para verificar lo obtenido.

(e) Debemos resolver p(x) > 0. Esto podemos hacerlo mediante una tabla de signos, pero también a partir de la gráfica realizada en el primer inciso, para concluir que hay población cuando la temperatura es mayor que 2ºC y menor que 18ºC.

Extraído de "Manual de matemática preuniversitaria". Carena, Marilina.

Ejemplo 15

Un productor tiene una plantación de una hectárea con 40 naranjos; cada uno de ellos produce 500 naranjas por año. Desea conocer cuál será la evolución de su producción si decide aumentar la cantidad de plantas en esa parcela. Para ello, encarga el estudio a un ingeniero agrónomo.

El profesional concluye que por cada planta que se incorpore, la producción de cada naranjo disminuirá en 5 unidades, dado que los nutrientes del suelo tienen un potencial limitado. Además, presenta un informe en el que figuran:

a). La fórmula que describe la producción total de la chacra en función de la cantidad de naranjos que se agreguen.

b). La cantidad de plantas adicionales que anularían la producción.

c). Un gráfico, a través del cual se pueden analizar los resultados obtenidos.

d). El número de árboles adicionales que maximizaría la producción.

Solución:

a). La producción de naranjas, sin efectuar modificaciones, resulta:

$$\underbrace{40}_{\substack{\textbf{cantidad}\\ \textbf{de árboles}}} \quad \bullet \quad \underbrace{500}_{\substack{\textbf{cantidad de}\\ \textbf{naranjas por}\\ \textbf{árbol}}} \quad = \quad \underbrace{20\,000}_{\substack{\textbf{producción}\\ \textbf{total de}\\ \textbf{naranjas}}}$$

Si el número de árboles se aumenta en una cantidad x, el total de árboles resulta ser: 40 + x

Y como consecuencia, el rendimiento por árboles es: 500 – 5x

Entonces, la fórmula que define la producción en función de los naranjos agregados se expresa:

$$P(x) = \underbrace{(40 + x)}_{\substack{\textbf{cantidad de}\\ \textbf{árboles}}} \bullet \underbrace{(500 - 5x)}_{\substack{\textbf{cantidad de}\\ \textbf{naranjas por árbol}}} \quad \text{o} \quad P(x) = -5 \bullet (40 + x) \bullet (x - 100)$$

(si se extrae factor común –5)

b). Para calcular la cantidad de árboles adicionales que anularía la producción, bastara determinar los ceros de la función. Es decir, resolver: ***–5. (x + 40). (x – 100) = 0***

Esta ecuación cuadrática está **factorizada** y su resolución es muy simple.

Teniendo en cuenta que la multiplicación es nula cuando alguno de los factores es cero, resulta:

x + 40 = 0 → ***x = -40*** (Es absurdo, porque no es posible considerar una cantidad de árboles negativa), o

x – 100 = 0 → ***x =100***

Esto significa que si se agregan 100 árboles, la producción será nula, pues P(100) = 0

c). Para hacer el gráfico, primero se calculan las coordenadas del vertice. Como se conocen los ceros, la abscisa del vértice se obtiene mediante la fórmula:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

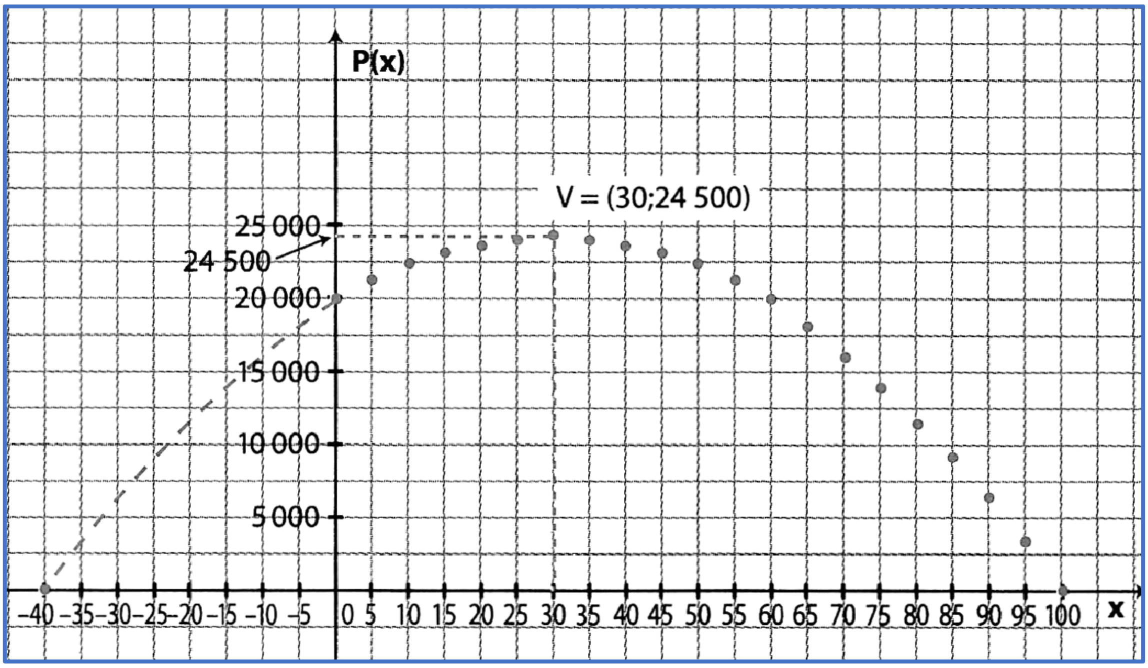
Reemplazando los valores de x_1 y x_2 en la expresión anterior, resulta:

$$x_v = \frac{-40 + 100}{2} \rightarrow x_v = 30$$

Como $y_v = f(x_v)$; entonces $y_v = f(30) = 24\,500$

El vértice es el punto V = (30, 24500)

Su representacion gráfica será:



d). Con el gráfico queda analizado este punto. Se observa claramente que la ordenada del vértice es el máximo de la función. Por lo tanto, la producción máxima es de 24 500 naranjas y, para obtenerla, deben agregarse 30 árboles (abscisa del vértice)

Extraido de “Matemática 1. Modelos matemáticos para interpretar la realidad”. Camuyrano, M. B. Net, G. Aragón, M.

Actividad

35-. Supongamos que un objeto ha sido lanzado formando un ángulo agudo con respecto a la horizontal (a diferencia del tiro vertical), de modo que su altura aproximada (en pies, abreviado ft) está dada por $h(t) = -16t^2 + 64t + 190$; siendo t el tiempo en segundos luego de su lanzamiento.

a). ¿Desde qué altura fue arrojado el objeto? ¿En qué otro instante se encuentra a dicha altura?

b). Indicar la altura del objeto luego de 1 segundo de haber sido arrojado.

c). Hallar la altura máxima que alcanza el objeto, y el tiempo que demora en alcanzarla.

d). Determinar cuánto tiempo le toma al objeto llegar al suelo.

36-. Un fabricante de lámparas tiene un costo diario de producción (en pesos) dado por $C(x) = 600 - 6x + 0{,}2x^2$, siendo x la cantidad de unidades producidas en el día. Determinar la cantidad de lámparas que debe producir para minimizar los costos, y cuál es el importe del mismo.

37-. La ganancia semanal (en miles de pesos) de una empresa que fabrica un determinado artículo, está dada por $G(x) = -0{,}5x^2 + 40x - 300$, siendo x la cantidad de artículos producidos.

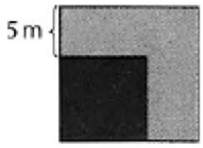
a). ¿Qué ganancia obtiene si produce 20 artículos semanales?

b). Hallar las cantidades mínima y máxima de artículos semanales que debe producir la empresa para no tener perdidas.

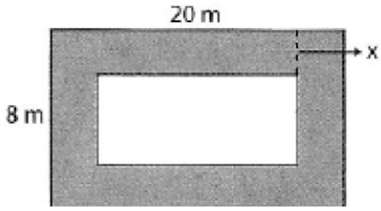
c). Hallar las cantidades mínima y máxima de artículos semanales que debe producir la empresa para obtener una ganancia de al menos 300 000 pesos.

d). Determinar la cantidad de artículos que la empresa debe producir semanalmente para maximizar su ganancia, e indicar cuál es dicha ganancia.

38-. Determinar las dimensiones del cuadrado pequeño, sabiendo que su área es la mitad de la del grande.



39-. Expresar la variación del área coloreada en función de x, determinar que alores puede tomar x y hallar para que valor de x el área vale 132 metros cuadrados.



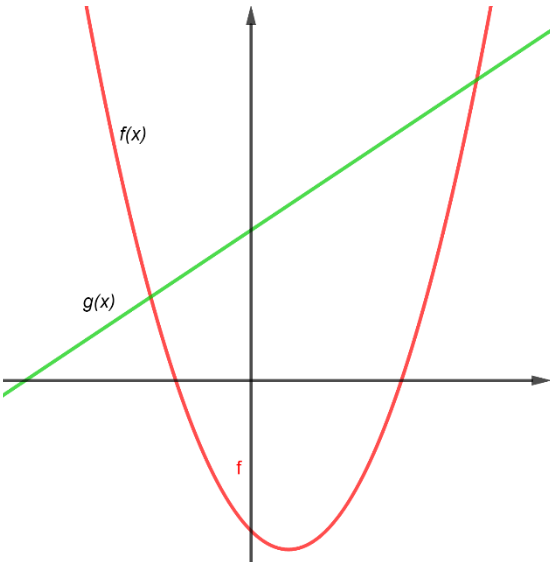
40-. En una plantación de manzanas de una hectárea hay 30 plantas. El valor de la cosecha obtenida de cada planta es de $140. Por cada árbol que se agrega, la cosecha disminuye $2. Determinar la cantidad de plantes que se deben agregar con el fin de maximizar el valor de la cosecha y calcular el valor correspondiente de la misma. ¿Con cuántas plantas incorporadas a la plantación se anularía el valor de la cosecha?

Extraído de "Manual de matemática preuniversitaria". Carena, Marilina.(35-36-37)
Extraido de "Matemática 1. Modelos matemáticos para interpretar la realidad". Camuyrano, M. B. Net, G. Aragón, M. (38-39-40)

Situación 6

Se sabe que la recta dibujada corta al eje x y al eje y en x = -6 y en y = 4, respectivamente. Además, las raíces de la función cuadrática graficada son -2 y 4, y el vértice de la parábola es el punto (1; -4,5).

¿En qué puntos se intersecan ambas gráficas?



Extraído de "Matemática4ES. Huellas". Chorny, F. Salpeter, C. Casares, P

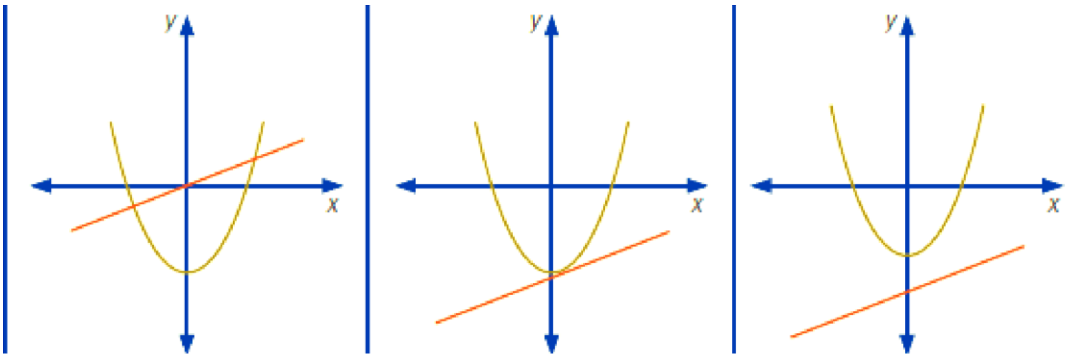
Sistema de Ecuaciones Mixtos

Llamamos sistema de ecuaciones mixtos a los sistemas compuestos por dos o más ecuaciones de diferentes tipos.

Analíticamente decimos que resolver un sistema de ecuaciones es encontrar el o los valores que verifican las ecuaciones en forma simultánea.

Gráficamente sería encontrar donde se cortan si es que lo hacen las gráficas de ambas funciones.

Estudiaremos aquellos sistemas formados por una función cuadrática y una función lineal. De esta forma podremos tener tres situaciones diferentes con las graficas de la parábola y la recta.



- Que la recta y la parábola se corten en dos puntos, en ese caso se dice que la recta es secante a la parábola. Esto sucede cuando el discriminante es positivo. $\Delta > 0$.
- Que la recta y la parábola se corten en un solo punto, en ese caso se dice que la recta es tangente a la parábola. Esto sucede cuando el discriminante es igual a cero, $\Delta = 0$.
- Que la recta y la parábola no se corten, no hay punto de intersección. Esto sucede cuando el discriminante es menor que cero. $\Delta = 0$.

Ejemplo 16

Resuelve el siguiente sistema: $\{y = 2x^2 - 8x + 8 \; y = 2x$

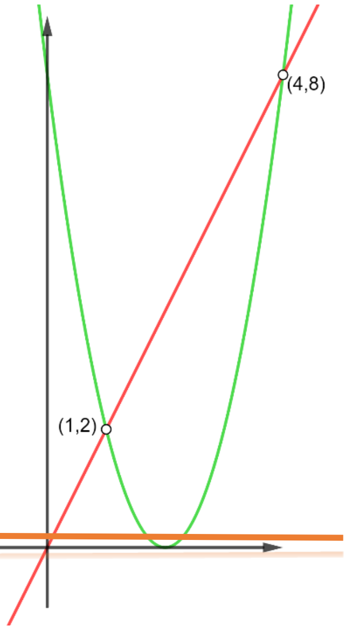
<u>Solución:</u> Resolver un sistema de ecuaciones mixto, debemos encontrar los puntos que satisfacen ambas ecuaciones. Por esto, igualamos las ecuaciones.

Igualando nos queda: $2x^2 - 8x + 8 = 2x$

$$2x^2 - 10x + 8 = 0 \;\rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4.2.8}}{2.2} \rightarrow x_1 = 4\,;\; x_2 = 1$$

Con esas abscisas de los puntos de intersección de ambas curvas, reemplazamos estos valores en cualquiera de las ecuaciones y obtenemos los valores correspondientes a las ordenadas.

Los puntos serán: P (4, 8) y Q (1, 2).



Extraido de "Matemática 1. Modelos matemáticos para interpretar la realidad". Camuyrano, M. B. Net, G. Aragón, M.

Ejemplo 17

Dos automóviles circulan en el mismo sentido por la ruta. Cuando pasan por el puesto policial, se registran los siguientes datos:

Auto A	**Auto B**
Velocidad: 120 km/h	Velocidad: 80 km/h
Aceleración: -40 km/h^2	Aceleración: 0

Interesa determinar si volverán a encontrarse, en qué momento y a qué distancia del puesto policial lo harán.

<u>Solución:</u> La física nos proporciona una función que nos indica la posición que se encuentra el móvil según pase el tiempo para cada automóvil.

Para el auto A, como tiene una aceleración, el movimiento es un MRUV, su fórmula será: $P(t) = P_0 + v_0\, t + ½\, at^2$; donde P_0 es la posición inicial que en este caso es 0; v_0 es la velocidad inicial, y a es la aceleración.

Para el automóvil A: $P_A(t) = 120\, t - 20t^2$

Para el automóvil B: $P_B(t) = 80\, t$

Las posiciones están expresadas en km y el tiempo en horas.

Para poder determinar si se encuentran, basta hallar para qué valores de t las posiciones coinciden, es decir $P_A(t) = P_B(t)$; entonces $120t - 20t^2 = 80t$

$40t - 20t^2 = 0 \rightarrow -20t^2 + 40t = 0 \rightarrow -20t.\ (t-2) = 0$

Esto nos indica que cuando t = 0 (cuando pasan por el puesto policial) y t = 2 (dos horas despues de haber pasado por el puesto policial) los automoviles se encontrarán.

Calculamos la imagen para t = 2

$P_A(2) = P_B(2) = 160$; corresponde a una distancia de 160 km que alcanzan 2hs después de pasar por el control policial.

Extraido de “Matemática 1. Modelos matemáticos para interpretar la realidad”. Camuyrano, M. B. Net, G. Aragón, M.

Actividad

41-. Dadas las funciones $f(x) = x^2 + 4x – 2$ y $g(x) = 4x – 3$,

a). Construyan las gráficas y estimen “a ojo” los puntos de intersección entre ambas curvas.

b). Planteen el sistema mixto y encuentren las coordenadas de los puntos de intersección.

42-. Resuelvan los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = 7x^2 \\ y = 4x \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x^2 - 3x + 2 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

43-. Un automóvil se dirige hacia Neuquén, desde la localidad ubicada a 150 km de Buenos Aires, por una ruta rectilínea. La distancia de dicho automóvil a la ciudad de Buenos Aires puede calcularse por la función: D = 150 + 80t; donde D es la distancia medida en km y t es el tiempo medido en horas. Si un camión transita por la misma ruta que el automóvil y salió a la misma hora, pero desde otra localidad, ubicada a 95km de Buenos Aires, la distancia de dicho camión a la ciudad de Buenos Aires puede calcularse por la función: $D = 95 + 30t + 5t^2$, donde D es la distancia medida en km y t es el tiempo medido en horas. ¿Se encuentran estos dos vehículos? Si así ocurre, ¿en qué lugar se realiza el encuentro?

44-. Esteban y Ramon tienen una venta de jugos artesanales cada uno en distintos puntos se la ciudad. La ganancia de Esteban en miles de pesos en un fin de semana está dada por la función $E(x) = -x^2 + x$; y la de Ramón por la función R(x) = 2x, siendo n la cantidad de cientos de jugos vendidos.

a). ¿Cuántos jugos tiene que vender cada uno para que las ganancias de ambos sean las mismas? ¿Cuáles son los montos?

b). ¿Cuántos jugos tiene que vender esteban para que sus ganancias sean mayores que las de Ramón?

Bibliografía

Kurzrok, Liliana E.- Comparatore, Claudia R. “Matemática I, de la practica a la formalización”. Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Longseller. 2015.

Carena, Marilina. “Manual de matemática preuniversitaria”. Santa Fe. Ediciones UNL. 2019.

Sanabria, Daniela [et al]. “Matemática: entre la secundaria y la universidad”. Tandil. Editorial UNICEN. 2019.

Di domenicantonio, R. Lubomirsky, N. Rivera, A. “Matemática inicial para ingenieria”. La Plata. EDULP. 2019.

Chorny, F. Salpeter, C. Casares, P. “Matemática4ES. Huellas”. Boulonge. Estrada. 2015.

Camuyrano, M. Beatríz. Net, Gabriela. Aragón, Mariana. “Matemática 1. Modelos matemáticos para interpretar la realidad”. Estrada Polimodal. Buenos Aires. Editorial Estrada. Año 2000.

Kaczor, P. Schaposchnik, R. Franco, E. Cicala, R. Diaz, B. “Matemática I. Polimodal”. Ediciones Santillana S. A. Buenos Aires. Año 2000.